Semaine 1

Programme de colles du 23 au 29 Septembre

Ce programme de colle ne contient pas les hypothèses sur k et n dans les propositions. A vous de les compléter!
Les exercices de colle porteront sur les chapitres suivants :

- Chapitre 1. Pack de démarrage. On insistera en particulier sur:
  - Domaine de définition des fonctions
  - Fonctions usuelles, particulièrement fonctions trigo, exp et ln
  - Quantificateurs, négation de propositions logiques, contraposée, preuve d'une proposition contenant $\forall x \cdots$
  - Récurrence. Je veux des belles rédactions bien propres!
  - Factorielles et puissances. Penser à $(n+1)! = (n+1) \times n!$ et $a^{n+1} = a^n \times a$
  - Notation $\sum$ et $\prod$. Méthodes :
    * Glissement d'indice
    * Mettre de côté le premier ou le dernier terme : $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}$
    * Écrire $a = a - b + b$ quand on veut faire apparaître $a - b$
  - Sommes classiques :
    * Somme arithmétique : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=i}^{n} k = \frac{(n-i+1)(n+i)}{2}$
    * Somme géométrique : $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, $\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-q^p}{q-1}$
    * Formule de Bernoulli : $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$
  - Coefficients binomiaux :
    * Formule de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
    * Formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

  ,
- Chapitre 2. Ensemble et applications. On insistera en particulier sur :
  - Ensembles, prouver une inclusion, théorème de la double inclusion
  - Injections, surjections, bijections.

Les preuves de colle à connaître sont :

- $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; redonner la formule pour la somme des carrés et des cubes : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ et redonner la formule $\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-q^p}{q-1}$ et sa démonstration. Attention aux hypothèses ($q \neq 1$)!
- Binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$