Semaine 21

Programme de colle Semaine du 30 Mars

Les exercices de colle porteront sur les chapitres suivants :

- Applications linéaires / Je laisse ce chapitre par cohérence avec le chapitre en dimension finie.
  - Définition, si f est linéaire $f(0_E) = 0_F$
  - Stabilité par combinaison linéaires, composition, passage à l'inverse.
  - Définition du noyau, lien avec l'injectivité
  - Définition de l'image. Attention à ne pas confondre les deux. Savoir étudier les égalités d'ensembles par double inclusion sur ces deux objets.
  - Un espace de dimension n est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  - Projecteurs : définition avec noyau et image supplémentaire, propriété équivalente ($p \circ p = p$), savoir faire un dessin pour expliquer ce dont on parle.
- Probabilités générales. *Dans ce chapitre je veux qu'une attention particulière soit portée aux objets : une probabilité n'est pas égale à un ensemble, on ne peut pas faire une somme d'ensemble ni une union de probabilités.*
  - Lois de Morgan, union et intersection dénombrables
  - Définition d'une tribu, d'un SCE
  - Définition d'une probabilité et propriétés
  - Théorème de la limite monotone, corollaire et utilisation.
  - Comme en support fini : probas conditionnelles, probas totales (ici pas besoin de vérifier dans les exos que la série converge on le sait!) et formule de Bayes, indépendance de VA
- Variables aléatoires discrètes. *Faire bien attention à ne pas manipuler des séries jusqu'à $+\infty$ mais bien passer à la limite dans les calculs. Faire attention à bien vérifier l'existence de la variance et de l'espérance pour les variables aléatoires infinies.*
  - La famille des $([X = x_k])_{x_k \in X(\Omega)}$ est un SCE (et donc la somme des probas fait 1).
  - Loi d'une VA, rappel des lois classiques, loi géométrique et loi de Poisson.
  - Variables indépendantes (en pratique, on sait généralement reconnaître l'indépendance grâce à l'énoncé)
  - Fonction de répartition. Pouvoir faire des représentations de F_X. Propriété : croissante, continue à droite, limites, elle caractérise la VA.
  - Espérance. Définition cas dénombrable, cas de géométrique et Poisson, transfert, linéarité, existence par domination.
  - Variance. König-Huygens (attention à l'orthographe!), $V(aX + b)$, variance des lois classiques
- Applications linéaires en dimension finie. Chapitre pas tout à fait fini
  - $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ où $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E
  - rang d'une application linéaire et **théorème du rang**
  - formes linéaires et hyperplan.
  - Utilisation du rang pour caractériser les applications injectives et surjectives.
  - Représentation matricielle des applications linéaires. Coordonnées de l'image.
  - Vraie définition du rang d'une matrice.

  - Cas particulier des endomorphismes, lien entre isomorphismes et matrices inversibles, inverser la matrice à droite suffit.
  - Polynômes d'endomorphisme et polynômes annulateurs.
  - Le rang n'est pas modifié par une composition avec un isomorphisme, conséquence sur le pivot de Gauss.

Les preuves de colle à connaître sont :

- Espérance et Variance pour géométrique et Poisson (toutes les citer + un calcul ou deux au choix du colleur)
- Théorème du rang.
- La matrice des coordonnées de $f(u)$ est AX.
- f est un isomorphisme ssi A est inversible et alors A^{-1} est la matrice de f^{-1}.
- Savoir refaire un exercice type autour des polynômes annulateurs.

Prochain programme : Repos et Intégrales généralisées.

Lois discrètes usuelles

	Nom	Notation	Support $X(\Omega)$	Valeur de $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$	Espérance	Variance
Lois finies	Loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$	$\mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$	$\{1,\dots,n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
	Loi uniforme sur $\{a,a+1,\dots,b\}$ où $a,b \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leq b$	$\mathcal{U}(\{a,\dots,b\})$	$\{a,\dots,b\}$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
	Loi de Bernoulli de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathcal{B}(p)$ ou $\mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
	Loi binomiale de paramètres n et p $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$	$\mathcal{B}(n,p)$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Lois infinies	Loi géométrique de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
	Loi de Poisson de paramètre λ $\lambda \in]0,+\infty[$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ