Semaine 22

Programme de colle Semaine du 14 Avril

Très peu de changement cette semaine, nous avons pris le temps de faire beaucoup d'exercices sur l'intégration généralisée. On a commencé le cours sur les dérivées successives mais fait aucun exo donc ne pas poser d'exercices sur ce chapitre (cependant une question de cours dessus).

Les exercices de colle porteront sur les chapitres suivants :

- Applications linéaires / Je laisse ce chapitre par cohérence avec le chapitre en dimension finie.
  - Définition, si f est linéaire $f(0_E) = 0_F$
  - Stabilité par combinaison linéaires, composition, passage à l'inverse.
  - Définition du noyau, lien avec l'injectivité
  - Définition de l'image. Attention à ne pas confondre les deux. Savoir étudier les égalités d'ensembles par double inclusion sur ces deux objets.
  - Un espace de dimension n est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  - Projecteurs : définition avec noyau et image supplémentaire, propriété équivalente ($p \circ p = p$), savoir faire un dessin pour expliquer ce dont on parle.
- Variables aléatoires discrètes. *Faire bien attention à ne pas manipuler des séries jusqu'à $+\infty$ mais bien passer à la limite dans les calculs. Faire attention à bien vérifier l'existence de la variance et de l'espérance pour les variables aléatoires infinies.*
  - La famille des $([X = x_k])_{x_k \in X(\Omega)}$ est un SCE (et donc la somme des probas fait 1).
  - Loi d'une VA, rappel des lois classiques, loi géométrique et loi de Poisson.
  - Variables indépendantes (en pratique, on sait généralement reconnaître l'indépendance grâce à l'énoncé)
  - Fonction de répartition. Pouvoir faire des représentations de F_X. Propriété : croissante, continue à droite, limites, elle caractérise la VA.
  - Espérance. Définition cas dénombrable, cas de géométrique et Poisson, transfert, linéarité, existence par domination.
  - Variance. König-Huygens (attention à l'orthographe!), $V(aX + b)$, variance des lois classiques
- Applications linéaires en dimension finie.
  - $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ où $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E
  - rang d'une application linéaire et **théorème du rang**
  - formes linéaires et hyperplan.
  - Utilisation du rang pour caractériser les applications injectives et surjectives.
  - Représentation matricielle des applications linéaires. Coordonnées de l'image.
  - Vraie définition du rang d'une matrice.
  - Cas particulier des endomorphismes, lien entre isomorphismes et matrices inversibles, inverser la matrice à droite suffit.
  - Polynômes d'endomorphisme et polynômes annulateurs.
  - Complément autour du rang : le rang est composé par la composition avec un automorphisme, les différentes définitions du rang sont équivalentes.

- Intégrales généralisées
  - Définition d'une intégrale impropre et de sa convergence, exemples d'études, intégrales doublement impropres
  - Intégrales faussement impropre
  - Propriétés : les mêmes que dans le cas segment
  - Intégration par partie (attention à rester sur un segment), changement de variable (attention à bien vérifier que le changement proposé est une bijection croissante (ou décroissante) $\mathcal{C}^1$).
  - Parité et imparité et intégrale symétrique à 0
  - Comparaison des intégrales de fcts positives, convergence absolue et Jensen.
  - Intégrales de référence : exponentielle et Riemann

Les preuves de colle à connaître sont :

- Pour les élèves très à l'aise uniquement : limite monotone. J'ai fait très proprement le cas de l'union, en prouvant bien à chaque fois les égalités d'ensemble, donc la preuve est un peu longue, si le colleur le souhaite une partie peut se faire à l'oral sans écrire. Je l'ai rendue obligatoire pour certains élèves (voir mail)
- Théorème du rang.
- La matrice des coordonnées de $f(u)$ est AX.
- Intégrales de Riemann.
- Formule de Taylor avec reste intégral.

Prochain programme : Compléments d'analyse : formules de Taylor et développements limités, peut-être fonctions convexes, et surtout beaucoup de chocolat.

Lois discrètes usuelles

	Nom	Notation	Support $X(\Omega)$	Valeur de $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$	Espérance	Variance
Lois finies	Loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$	$\mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$	$\{1,\dots,n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
	Loi uniforme sur $\{a,a+1,\dots,b\}$ où $a,b \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leq b$	$\mathcal{U}(\{a,\dots,b\})$	$\{a,\dots,b\}$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
	Loi de Bernoulli de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathcal{B}(p)$ ou $\mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
	Loi binomiale de paramètres n et p $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$	$\mathcal{B}(n,p)$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Lois infinies	Loi géométrique de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
	Loi de Poisson de paramètre λ $\lambda \in]0,+\infty[$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ