Semaine 25

Programme de colle Semaine du 19 Mai

Les exercices de colle porteront sur les chapitres suivants :

- Variables aléatoires discrètes. *Faire bien attention à ne pas manipuler des séries jusqu'à $+\infty$ mais bien passer à la limite dans les calculs. Faire attention à bien vérifier l'existence de la variance et de l'espérance pour les variables aléatoires infinies.*
  - La famille des $([X = x_k])_{x_k \in X(\Omega)}$ est un SCE (et donc la somme des probas fait 1).
  - Loi d'une VA, rappel des lois classiques, loi géométrique et loi de Poisson.
  - Variables indépendantes (en pratique, on sait généralement reconnaître l'indépendance grâce à l'énoncé)
  - Fonction de répartition. Pouvoir faire des représentations de F_X. Propriété : croissante, continue à droite, limites, elle caractérise la VA.
  - Espérance. Définition cas dénombrable, cas de géométrique et Poisson, transfert, linéarité, existence par domination.
  - Variance. König-Huygens (attention à l'orthographe!), $V(aX + b)$, variance des lois classiques
- Intégrales généralisées
  - Définition d'une intégrale impropre et de sa convergence, exemples d'études, intégrales doublement impropres
  - Intégrales faussement impropre
  - Propriétés : les mêmes que dans le cas segment
  - Intégration par partie (attention à rester sur un segment), changement de variable (attention à bien vérifier que le changement proposé est une bijection croissante (ou décroissante) $\mathcal{C}^1$).
  - Parité et imparité et intégrale symétrique à 0
  - Comparaison des intégrales de fcts positives, convergence absolue et Jensen (ou inégalité triangulaire).
  - Intégrales de référence : exponentielle et Riemann
- Compléments d'analyse
  - Dérivées successives, fonctions $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$, opérations sur ces fonctions, formule de Leibniz.
  - Formules de Taylor (avec reste intégral et Inégalité de Taylor-Lagrange). Retrouver la formule de l'exponentielle.
  - Rappels sur la négligeabilité
  - Développements limités $DL_n(0)$, $DL_n(a)$, partie régulière d'ordre n.
  - Lien entre DL et continuité, dérivabilité, tangente.
  - Formule de Taylor-Young (pour les intéressés ayant lu l'appendice, ici : `https://www.youtube.com/watch?v=Q1YUcMdQ4BA&ab_channel=Bibmath.net` vous trouverez une preuve)
  - Les DL classiques : $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $e^x, \ln(1+x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\sqrt{1+x}$.
  - Unicité du DL s'il existe, troncature de DL, combinaison linéaire de DLs, produit de DL. Savoir se servir de ces résultats dans des calculs.
  - DL et équivalents, recherche d'extremums

  - Fonctions convexes : définition, interprétation graphique (savoir faire un dessin et de la retrouver la définition), lien entre convexité et dérivée, là aussi interprétation graphique, recherche d'extremums et points d'inflexion.

- Couples de VA
  - Définition, Système complet lié à un couple, loi conjointe et lois marginales. Savoir faire des tableaux dans le cas fini.
  - Loi conditionnelle, indépendance
  - Loi de la somme, cas particulier d'une somme de lois de Poisson, stabilité de la binomiale (pas par le calcul)
  - Loi du maximum et loi du minimum de deux VA
  - Théorème du transfert et ses applications : linéarité de l'espérance (cas fini), espérance du produit, V(X+Y) où X et Y admettent une variance, variance d'une binomiale.

Les preuves de colle à connaître sont :

- Pour les élèves plus à l'aise : f convexe $\Leftrightarrow$ f' est croissante.
- Stabilité de la loi de Poisson par somme
- Loi du maximum de deux $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Prochain programme : Markov, BT puis valeurs propres