Semaine 27

Programme de colle Semaine du 9 Juin

Les exercices de colle porteront sur les chapitres suivants :

- Variables aléatoires discrètes. *Faire bien attention à ne pas manipuler des séries jusqu'à $+\infty$ mais bien passer à la limite dans les calculs. Faire attention à bien vérifier l'existence de la variance et de l'espérance pour les variables aléatoires infinies.*
  - La famille des $([X = x_k])_{x_k \in X(\Omega)}$ est un SCE (et donc la somme des probas fait 1).
  - Loi d'une VA, rappel des lois classiques, loi géométrique et loi de Poisson.
  - Variables indépendantes (en pratique, on sait généralement reconnaître l'indépendance grâce à l'énoncé)
  - Fonction de répartition. Pouvoir faire des représentations de F_X. Propriété : croissante, continue à droite, limites, elle caractérise la VA.
  - Espérance. Définition cas dénombrable, cas de géométrique et Poisson, transfert, linéarité, existence par domination.
  - Variance. König-Huygens (attention à l'orthographe!), $V(aX + b)$, variance des lois classiques
- Couples de VA
  - Définition, Système complet lié à un couple, loi conjointe et lois marginales. Savoir faire des tableaux dans le cas fini.
  - Loi conditionnelle, indépendance
  - Loi de la somme, cas particulier d'une somme de lois de Poisson, stabilité de la binomiale (pas par le calcul)
  - Loi du maximum et loi du minimum de deux VA
  - Théorème du transfert et ses applications : linéarité de l'espérance (cas fini), espérance du produit, V(X+Y) où X et Y admettent une variance, variance d'une binomiale.
- Convergence et approximation en probabilités. Aucun exercice n'a été fait sur ce chapitre, vous pouvez en mettre qui utilisent très basiquement les résultats du cours.
  - Inégalité de Markov
  - Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev
  - Loi faible des grands nombres
  - La loi de Poisson est une limite de lois biomiales
- Vecteurs propres, valeurs propres, diagonalisation. Jusqu'à recherche d'éléments propres (peu d'exercices fait sur la recherche d'éléments propres mais nous ferons lundi)
  - Savoir trouver la matrice d'une application linéaire avec les bases de l'espace de départ et d'arrivée données, formule $Y = AX$ pour $y = f(x)$.
  - Matrice de passage, inverse de $P_{B,B'}$, formule $X = P_{B,B'}X'$.
  - Matrices semblables et formule $A' = P_{B,B'}^{-1} A P_{B,B'}$
  - λ valeur propre de f ssi il existe $u \neq 0_E$ tel que $f(u) = \lambda u$. u est alors un vecteur propre. Spectre, espace propre $E_\lambda(f)$.
  - Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme. **A connaître par cœur!!!**
  - Cas de la valeur propre 0

- Mêmes résultats sur les matrices
- Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres et des espaces propres de même dimension
- A et ${}^tA$ ont mêmes valeurs propres et mêmes dimensions d'espaces propres.
- Pour les matrices 2x2: $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \lambda$ racine de $x^2 - Tr(A)x + \det(A)$
- Cas des matrices triangulaires
- Utilisation des polynômes annulateurs: Si P est annulateur de f alors les valeurs propres de f sont **parmi** les racines de P.
- Cas général : recherche des valeurs propres à vue, résolution du système $AX = \lambda X$
- Polynômes de Lagranges et somme de sous espaces propres est directe, famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre
- Nombre de valeurs propres maximal, diagonalisation dans le cas où on a n valeurs propres distinctes.

Les preuves de colle à connaître sont nombreuses cette semaine:

- Markov + BT + énoncer la loi faible des grands nombres (on pourra raccourcir selon la vitesse de l'élève)
- Convergence de binomiales vers Poisson
- Formules de changement de base : vecteurs puis matrices
- Polynomes annulateurs et vp : Proposition 11 puis 12.

Prochain programme : chapitre rapide sur la diagonalisation, ensuite probablement des révisions, où les colles porteront sur tout ce qui a été vu pendant l'année au choix du colleur.