Chapitre 2

Ensembles et applications

I Ensembles

1) Ensembles et sous ensembles

a) Définition et notations

Définition 1

On appelle "ensemble" tout objet mathématique contenant des éléments. On note $x \in E$ pour dire que l'élément x "appartient" à E.

Exemple :
Pour décrire un ensemble, on utilisera plusieurs types de notation :

- $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$: les "{ }" signifient "ensemble constitué de..." ou "ensemble des...".

  Ce même ensemble peut se noter :

  $$E = \{n \in \mathbb{N}; 2 \leq n \leq 6\}$$

  Ce qui signifie "E est l'ensemble des entiers n tels que $2 \leq n \leq 6$.

- $I = [0, 1]$: les intervalles sont bien sûr des ensembles. Les [ ] signifient "tous les réels entre....".

  En fait, on pourrait écrire $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$.

- $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ peut aussi se noter $E = [\![2, 6]\!]$. Les $[\![$ $]\!]$ désignent "les intervalles d'entiers".

- $\emptyset$ désigne le seul ensemble qui n'a pas d'élément : c'est "l'ensemble vide".

b) Sous ensemble

Définition 2

On dit qu'un ensemble A est un sous ensemble de E si et seulement si tout élement de A est un élement de E. Cela se note :

On note alors $A \subset E$

Exemples :

- $\mathbb{N}$ est un sous ensemble de $\mathbb{Z}$
- On a une sorte de chaîne d'inclusions :

  $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- $\emptyset$ est le seul ensemble inclus dans tous les ensembles !

Méthode : *Montrer une inclusion*

Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, on utilise le fait que dire $A \subset B$ signifie en fait exactement "si on est dans A, alors on est dans B".
On procédera donc de la façon suivante :

—

—

— On conclut "donc $A \subset B$."

Exemple :
Soit A l'ensemble des multiples de 4 et B l'ensemble des multiples de 2. Montrons que $A \subset B$.

Théorème 1 (*"théorème de la double inclusion"*)

Soient E et F deux ensembles. Alors $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Cela fournit une méthode de démonstration : pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on pourra montrer d'abord $E \subset F$, puis $F \subset E$.
▷ *Preuve :*

◁

c) Ensemble des parties d'un ensemble :

Définition 3

Soit E un ensemble.
On appelle "ensemble des parties de E", que l'on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des sous ensembles de E.

Exemple :

- Soit $E = \{1, 2, 3\}$ l'ensemble des parties de E est

- Comme $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, c'est à dire que $\mathbb{N}$ est un sous ensemble de $\mathbb{Z}$, on peut écrire $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
- Pour tout ensemble E, on a $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.

Au secours ! *C'est super grand $\mathcal{P}(E)$ non ?*

Si un ensemble E a n éléments, on peut montrer (voir TD) que $\mathcal{P}(E)$ en a 2^n. Même dans le cadre d'un ensemble E infini, on peut montrer que $\mathcal{P}(E)$ est "plus grand" que E.
Très rapidement, on abandonnera donc l'idée de faire la liste des parties d'un ensemble....

2) Intersection, Union

a) Intersection :

Définition 4

Soient A et B deux parties de E. On définit l'ensemble $A \underbrace{\cap}_{\text{“inter”}} B$ par :

$$A \cap B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Ce sont les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.
On généralise à n ensembles de la façon suivante :
si A_1, A_2, $\ldots A_n$ sont n ensembles, on note

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui sont simultanément dans tous les A_i.

Images/intersection.png

Exemples :

- $[0;3] \cap [2;4] =$
- $]0;4[\cap]-2;-1[= \emptyset$: on dit que $]0,4[$ et $]-2,-1[$ sont “disjoints”.

Propriété 1

(i) L'intersection est commutative et associative :

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(ii) L'intersection de deux ensembles est “plus petite” :

$$A \cap B \subset A \quad \text{et } A \cap B \subset B$$

▷ *Preuve :*

◁

b) Union

Définition 5

Soient A et B deux parties de E. On définit l'ensemble $A \underbrace{\cup}_{\text{“union”}} B$ par :

$$A \cup B = \{x \in E; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Ce sont les éléments qui sont dans A ou dans B (ou dans les deux).
On généralise à n ensembles de la façon suivante :
si A_1, A_2, $\ldots A_n$ sont n ensembles, on note

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

l'ensemble des éléments de E qui sont dans au moins un des A_i.

Images/union.png

Exemple :
La fonction f définie par $f(x) = (x-2)(x-3)$ est positive sur

Propriété 2

Soit A, B, C trois ensembles
(i) $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
(ii) $A \subset (A \cup B)$ *et* $B \subset (A \cup B)$ *(la réunion est "plus grande")*
(iii) Si $A \subset C$ *et* $B \subset C$ *alors* $A \cup B \subset C$

▷ *Preuve :* Montrons (iii) :

◁

c) distributivité

Propriété 3

Soient A, B et C trois ensembles. Alors
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

▷ *Preuve :*

◁

3) Opération sur les ensembles

a) Complémentaire, différence

Définition 6

Soit E un ensemble et A une partie de E. On définit le complémentaire de A dans E (ou simplement le complémentaire de A si il n'y a pas d'ambiguïté), noté $\overline{A}$ par

$$\overline{A} = \{x \in E; x \notin A\}$$

Images/complementaire.png

Exemple :
- dans $\mathbb{R}$, $\overline{[0, +\infty[} =]-\infty, 0[$.
- dans $\mathbb{R}$, $\overline{[0; 1]} =$

Définition 7

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.
On définit l'ensemble $A \setminus B$ par

$$A \setminus B = \{x \in A \text{ t.q. } x \notin B\}$$

La barre oblique se lit "privé de" et on dit qu'on a effectué de la différence de A par B.

Images/difference.png

Exemple : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ qu'on note plutôt $\mathbb{R}^*$

b) Complémentaire, union et intersection

Proposition 1 (*Lois de Morgan*)

Soient A et B deux ensembles, alors

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

▷ *Preuve :*

◁

c) Produit cartésien

Définition 8

Soit E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. Autrement dit :

$$E \times F = \{(x, y); x \in E, y \in F\}$$

On dit alors que $E \times F$ est le "produit cartésien" de E par F.
Un élément de $E \times F$ est appelé "couple" de $E \times F$

Exemples :

- $\{0,1\} \times \{1,2\} = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}$
- On peut représenter un produit cartésien sous forme de tableau à double entrée. Par exemple $\{0,1\} \times \{1,2,4\}$ peut se voir sous la forme :

Généralisation :
On peut faire le produit cartésien de plus que deux ensembles : $E \times F \times G$ sera par exemple l'ensemble des triplets (x,y,z) avec $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$.
Si on a p ensembles reliés par un produit cartésien, les éléments sont appelés des p-uplets ou des p-listes.

Notation

On note $E^2 = E \times E$ l'ensemble des couples de E, et pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note

$$E^p = \underbrace{E \times E \times ... \times E}_{p \text{ fois}}$$

l'ensemble des p-uplets d'éléments de E.

II Applications.

1) Généralités :

a) Définition et notation

Définition 9

On dit que f est une application définie sur un ensemble E à valeur dans un ensemble F si à tout élément de E elle associe un unique élément de F.
On utilise la notation :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Vocabulaire :

- $f(x)$ est appelé "image de x par f".
- Soit $y \in F$. Si il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, on dit que x est un antécédent de y par l'application f.

Remarque :

- Un élément de F peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents. En revanche, un élément de E a TOUJOURS une et une seule image.
- Cela ressemble fortement à une fonction... et pour cause : on confond souvent les deux termes ! Les différences sont subtiles, mais on utilisera le plus fréquemment le terme "fonction" quand on aura à faire à des applications définie sur un ensemble de réel et dont les images sont des nombres réels.

b) Exemples :

- L'application qui "ne fait rien" est appellée "identité". Ainsi, l'identité de E, notée Id_E est l'application :
$$Id_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$
- La fonction carré :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$
C'est une application...
- Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit l'application "indicatrice de A", notée δ_A ou 1_A par :
$$\delta_A : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$
Par exemple, si $A =]0, 3[$, $\delta_A(2) = 1$ et $\delta_A(-1) = 0$.

c) Fonctions de plusieurs variables :

Soient E, F et G trois ensembles et considérons une application
$$f : E \times F \to G$$
Ainsi, à tout couple (x, y) de $E \times F$, f associe une image dans G, que l'on devrait noter $f\big((x, y)\big)$, mais qu'on notera plus simplement $f(x, y)$

De cette manière f n'est plus vue comme une application d'une seule variable (un **couple**), mais comme une fonction de deux variables x et y.

On peut évidemment définir de la même façon des fonctions de 3, 4, ... variables.

Exemples :

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2x + 3y + xy \end{array}$ est une fonction de deux variables, notées x et y.
Par exemple : $f(1, 5) = 2 \times 1 + 3 \times 5 + 1 \times 5 = 22$
- $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{array}$ est aussi une application de deux variables, dont les images sont des couples.

Par exemple $g(2, -1) = (1, 3)$.

2) Opérations :

a) Restriction

Définition 10

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit $A \subset E$.
On appelle restriction de f à A, que l'on note parfois $f_{|A}$, l'application
$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple :

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ peut être restreinte à $\mathbb{R}_+$ (si par exemple on veut considérer plus précisément la croissance de celle ci sur cet intervalle...)

b) Prolongement

Définition 11

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit A un ensemble tel que $E \subset A$.
On appelle prolongement de f à A toute application g telle que $g_{|A} = f$.

Remarque :
Il y a en général une infinité de prolongements possibles .... Par exemple :

- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$ est un prolongement à $\mathbb{R}$ de l'application $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = \sqrt{x}$.

  Graphiquement :

  On pourrait également considérer

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

  Ce serait également un prolongement de $\sqrt{\ }$ à $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique est

- Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

  On peut montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et on peut prolonger f en 0 en posant $f(0) = 1$.

  Lorsque la valeur choisie pour prolonger est la limite de la fonction en ce point, on dit qu'on a prolongé f "par continuité". En général, on ne renomme pas la nouvelle fonction obtenue, on précise simplement la nouvelle valeur :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

III Injections, surjections et bijections

1) Applications injectives :

a) Définition

Pour toutes les application, si $x = y$, alors $f(x) = f(y)$. Lorsque la réciproque est vraie, on pose la définition suivante :

Définition 12

Soit f une application définie sur un ensemble E à valeur dans F. On dit que f est ***injective*** *sur E si et seulement si :*

$$\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Autrement dit : f est injective signifie que deux images sont égales seulement si les antécédents sont égaux... ou encore que les éléments de F (l'ensemble d'arrivée) ont au plus un antécédent (c'est à dire aucun ou un seul)

Remarques :
-Puisqu'on a toujours $f(x) = f(x)$, la définition peut se réécrire :

$$\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

La contraposée de la définition d'injective est intéressante également :

Propriété 4

f est injective sur un ensemble E si et seulement si :

Autrement dit : deux éléments différents ont toujours une image différente...

Exemple :

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est injective sur $\mathbb{R}_+$:
  si $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, alors en appliquant la fonction $x \mapsto x^2$, on obtient tout de suite $x = y$.
- La fonction $f : x \mapsto x^2$

b) Cas particulier de fonctions injectives :

Définition 13

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$).

Proposition 2

Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I. Alors f est injective.

▷ *Preuve* : On le fait avec la contraposée.

◁

Remarque :
On montre de même que si f est strictement décroissante, f est injective également.

Exemples :

- $x \mapsto e^x$ est injective sur $\mathbb{R}$ car strictement croissante.
- $x \mapsto \ln(x)$ est injective sur $\mathbb{R}_+^*$ car strictement croissante.
- $x \mapsto x^2$ est injective sur $\mathbb{R}_-$ car elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
  Elle est également injective sur $\mathbb{R}_+$ car elle y est strictement croissante.
  Elle n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

Danger ! *injectif ne signifie pas strictement monotone*

Il existe des fonctions injectives sans être croissante ou décroissante.
Par exemple :

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

est injective sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est ni décroissante, ni croissante sur $\mathbb{R}^*$. (En fait il faut faut avoir aussi la continuité)

Méthode : *Montrer que f est injective*

Pour montrer qu'une application est injective on pourra :

1. Si c'est une fonction dérivable, étudier ses variations et voir si elle est strictement monotone.
2. On peut aussi résoudre l'équation à double inconnue $f(x) = f(y)$ et montrer que seul $x = y$ est possible.
3. On peut résoudre l'équation $y = f(x)$ et montrer qu'il ne peut jamais y avoir plusieurs solutions, quelle que soit la valeur de y.

Exemple :

Montrer par les trois méthodes que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+7 \end{array}$ est injective.

2) Surjection :

Définition 14

Soit $f : E \to F$ une application, f est dite ***surjective*** *sur F si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E.*

Avec des quantificateurs :

$$\forall y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x)$$

Méthode : *Montrer la surjectivité*

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on pose $y \in F$ et on résout l'équation d'inconnue x : $f(x) = y$

La lettre y est alors un paramètre : on va chercher à résoudre sans connaitre ce y !

Si cette équation a toujours au moins une solution, quelle que soit la valeur de y, alors f est surjective et si on trouve au moins un y pour lequel il n'y a pas de solution, elle n'est pas surjective.

Exemple :

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

3) Bijection

a) Définition :

Définition 15

*Une application $f : E \to F$ est dite **bijective** si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.*
Autrement dit, f est bijective si et seulement si tout élément de F admet un et un seul antécédent dans E.
Ce que l'ont peut écrire sous la forme

Exemple :

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas bijective car non surjective
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & {\mathbb{R}_+}^* \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ est bijective.
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$ n'est pas bijective (car non injective).

Méthode : *Montrer qu'une fonction est bijective*

On peut utiliser directement la définition :
- Soit $y \in F$.
- On écrit alors $y = f(x) \Leftrightarrow \cdots$ Attention à bien raisonner tout du long par équivalents !
- Si on trouve bien un unique x on a gagné !

b) Fonction réciproque

Un des intérêts des bijections est d'avoir la possibilité de "revenir en arrière" :

Définition 16

Soit $f : E \to F$ une application bijective. On appelle bijection réciproque de f l'application notée f^{-1} définie de la manière suivante : pour tout $y \in F$ on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f. Cela s'écrit :

$$\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y.$$

Théorème 2

Soit f une application de E dans F
f est bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ vérifiant SIMULTANEMENT les deux conditions suivantes :
(i) $\forall x \in E, g \circ f(x) = x$ (c'est à dire $g \circ f = Id_E$)
(ii) $\forall y \in F, f \circ g(y) = y$ (c'est à dire $f \circ g = Id_F$)
L'application g ainsi définie est en fait f^{-1}.

▷ *Preuve :*

◁

Exemples :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $exp(\ln(x)) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(e^x) = x$. Ainsi, ln est la bijection réciproque de exp.
- Pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$ et $(\sqrt{x})^2 = x$. Ainsi, la racine carrée est la bijection réciproque du carré, quand on restreint celui-ci à $\mathbb{R}_+$.

c) Représentation graphique de la réciproque :

Propriété 5

Soit f une fonction bijective, f^{-1} sa bijection réciproque, $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ celle de f^{-1}.
Alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

En effet, soit $M \in \mathcal{C}_f$. Alors les coordonnées de M sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $y = f(x)$.
Ainsi, $f^{-1}(y) = x$, donc x est l'image de par f^{-1} de y.
Autrement dit, le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ est sur la courbe de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

Exemple :
Prenons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$ et représentons f et f^{-1} :

d) Cas particulier de bijection

Théorème 3 (*theorème de la bijection monotone*)

- *Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$, alors f est une bijection de $[a\,, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.*
- *Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a\,, b]$, alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.*

▷ *Preuve :*

◁

Remarque :
Dans le cas où $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle avec une ou des bornes infinies ou ouverte, on remplace par des limites et l'intervalle image est ouvert.
Par exemple, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
Sa limite en 0 est $+\infty$, celle en $+\infty$ est 0.
C'est donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$

IV Bijections à connaître

1) Racine n-ième :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. * On considère la fonction $f : x \mapsto x^n$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' : x \mapsto nx^{n-1}$.
Les variations de f dépendent de la parité de n.

Propriété 6 (*Quelques propriétés de la racine n−ème*)

$\sqrt[n]{\ }$ est une fonction continue, croissante et dérivable sur son ensemble de définition, sauf en 0.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ou $x \in \mathbb{R}_+$ (selon la parité de n), $(\sqrt[n]{x})^n = x$
Si n est pair, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x^n} = |x|$
Si n est impair, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x^n} = x$.
Enfin, comme pour la racine carrée, on montre que, pour x et y dans l'ensemble de définition, $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$

2) Puissance réelles :

a) Définition :

Définition 17

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ le nombre x^α par :

$$\begin{cases} x^\alpha &= 0 \text{ si } x = 0 \\ x^\alpha &= e^{\alpha \ln(x)} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Exemple : $2^{3,2} = e^{3,2\ln(2)} \simeq 9,2$ (effectivement un peu plus que 2^3)

b) Correspondances :

avec les puissances entières :
Si $x > 0$, on sait que $\ln(x^n) = n\ln(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $e^{n\ln(x)} = e^{\ln(x^n)} = x^n$: on retrouve exactement la même formule.
Attention : cette correspondance n'est valable que pour $x > 0$, les puissances réelles n'étant pas définie pour $x < 0$.

avec $\sqrt[n]{x}$:
Toujours dans le cas $x > 0$, considérons $x^{\frac{1}{n}}$, on a : $(x^{\frac{1}{n}})^n = (e^{\frac{1}{n}\ln(x)})^n = e^{\ln(x)} = x$, donc $x^{\frac{1}{n}}$ est un nombre positif qui, élevé à la puissance n, vaut x : un seul nombre vérifie cela $\sqrt[n]{x}$.
Ainsi, pour $x > 0$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, quelle que soit la parité de n.
Attention : à nouveau, cette correspondance n'est vraie que pour $x > 0$.

c) Propriétés :

Propriété 7

On vérifie facilement les propriétés de calcul suivantes :

1. *pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$*
2. *pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $x > 0$, $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha\beta}$*