Chapitre 6

Calcul matriciel

I Matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1) Définitions :

Soient n et p deux entiers naturels.

Définition 1

On appelle matrice de taille $n \times p$ tout tableau A d'éléments de $\mathbb{R}$ comportant n lignes et p colonnes.
On note alors $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où a_{ij} désigne l'élément à la i-eme ligne et j-eme colonne dans le tableau A.
On présentera également A sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les éléments de la matrice A sont appelés "coefficients" de A.
L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice appartenant à $\mathcal{M}$
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice appartenant à $\mathcal{M}$

Remarque : deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même taille et les mêmes éléments dans le même ordre :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ est différente de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ et est différente de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) Matrices particulières, vocabulaire :

▶ **Matrice nulle :** La matrice $O_{n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls.
Exemple :

$$O_{2,3} =$$

▶ **Matrice ligne :** Une matrice $M \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est appelée matrice ligne.

Exemple : $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

Lorsqu'on extrait la i ème ligne d'une matrice A, on parle du $i$eme vecteur ligne, souvent noté L_i.

Exemple : si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$ est le $2e$ vecteur ligne de M, que l'on noterait donc L_2.

▶ **Matrice colonne :**
Même chose que pour les lignes : si $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on parle de matrice colonne.
On définit de même le $j$eme vecteur colonne d'une matrice lorsqu'on extrait la j eme colonne. On le note souvent C_j.

▶ **Matrice carrée :**
Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est dite carrée. On note simplement $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Exemple :
$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in$

▶ **Matrice triangulaire supérieure**
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i > j$.
On a alors

$A =$ par exemple :

▶ **Matrice triangulaire inférieure :**
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i < j$.
On a alors

$A =$ par exemple :

▶ **Matrice diagonale :**
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
On a alors

$A =$ par exemple :

▶ **Matrice identité :**
On appelle identité la matrice $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est diagonale avec uniquement des 1 sur la diagonale.
On a alors

$I_n =$ par exemple : $I_4 =$

II Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1) Structure vectorielle :

a) Addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

Définition 2

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ *deux matrices de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. *On définit l'opération* $A + B$ *par*

$A + B = (\qquad\qquad)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} =$

On dit qu'on "additionne terme à terme".

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} =$$

Remarques :

1. Si a_{ij} et b_{ij} sont des éléments de $\mathbb{R}$, $a_{ij} + b_{ij}$ est un élément de $\mathbb{R}$ également, ainsi $A + B$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, tout comme A et B.
   On dit que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est stable pour l'opération $+$.
2. De part sa définition, l'opération d'addition sur les matrices hérite des propriétés de l'addition sur $\mathbb{R}$, on a ainsi :

3. Attention : si les matrices sont de tailles différentes, on ne peut pas les additionner...

b) Produit par un scalaire :

Définition 3

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On définit* λA *par* $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.
Autrement dit : on multiplie tous les termes par λ.

Exemples :

- $2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$
- $3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} =$

Remarques :

1. Comme pour la somme, le produit par un scalaire est stable : on a bien $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2. Cette opération hérite à nouveau des propriétés du produit sur $\mathbb{R}$, c'est à dire :

3. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, muni de ces opérations d'addition et de multiplication par un scalaire, forme ce que l'on appelle un "espace vectoriel" : son comportement vis a vis de ces opérations est le même que celui que vous connaissez pour les vecteurs...

2) Multiplication

a) Définition :

Définition 4

Soient n, p et q trois entiers naturels. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit la matrice $C = AB$ comme la matrice $(c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ telle que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

En pratique :
On peut présenter l'opération de la manière suivante :

Remarque :
La case de coordonnée (i, j) est en fait le produit scalaire entre le i-ème vecteur ligne de A et le j-ème vecteur colonne de B.

b) Ce qui va mal...

Il y a énormément de pièges :

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  Alors $AB =$ et $BA =$

- Les tailles doivent être compatibles.

  Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

  Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

▶ Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $AB =$

Conclusion :

▶ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Alors $AB =$ et $CB =$

Conclusion :

c) Ce qui va bien :

Proposition 1

Sous condition de compatibilité des tailles des matrices A, B et C, on a :

(i) $(A + B)C =$

(ii) $A(B + C) =$

(iii) *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(AB) =$

(iv) $(AB)C =$

▷ *Preuve :* Montrons (i) (les autres se démontrent de la même façon :)

◁

On dispose d'une matrice qui joue le rôle du 1 pour le produit des matrices carrées (et uniquement pour les matrices carrées...) : c'est l'identité.

Proposition 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice identité de taille* n. *Alors*

$$AI_n = I_n A = A$$

.

▷ *Preuve* : On le vérifie avec la formule du produit :

◁

Le même genre de preuve permet de montrer la proposition suivante :

Proposition 3

Soit A *et* B *deux matrices diagonales de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \mu_n \end{pmatrix}$$

Alors AB *est diagonale également et on a :*

3) Transposée d'une matrice :

a) Définition :

On munit $\mathcal{M}_{n,p}$ d'une dernière opération :

Définition 5

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. *On appelle transposée de* A *la matrice* ${}^tA = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ *définie par* $b_{ij} = a_{ji}$.

Plus simplement : ${}^tA$ *est la matrice* A *dont on a inversé les lignes et les colonnes.*

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a pour transposée ${}^tA =$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ a pour transposée ${}^tB =$

Remarques :

1. L'opération de transposition est une "bijection involutive" : c'est une bijection d'inverse elle même. En effet, ${}^t({}^tA) =$.
2. Si ${}^tA = A$, on dit que A est symétrique.

b) Transposée et addition :

Propriété 1

Soient A *et* B *deux matrices de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors ${}^t(\lambda A) =$

et ${}^t(A + B) =$

On dit que l'opération de transposition est linéaire.

c) Transposée et produit :

Proposition 4

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Alors ${}^t(AB) =$

III Puissances et inverse de matrice :

1) Puissances de matrice :

a) Définition :

Définition 6

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $N \in \mathbb{N}$.
On définit A^N par

Exemple :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 =$, $A^3 =$

et donc pour tout $n \geq 3$ on a : $A^n =$

On dit qu'une telle matrice est **nilpotente**.

b) Puissance de matrice diagonale :

Proposition 5

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$,

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a
$A^N =$

▷ *Preuve :*

◁

c) Formule du binôme pour les matrices :

Théorème 1

Soient A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si

alors, $(A+B)^n =$

▷ *Preuve :* Par récurrence : même preuve que dans $\mathbb{R}$.

◁

Danger ! *Ne fonctionne pas si non commutatif*

La commutativité est essentielle : dans la preuve, on écrit que

$$(A+B)^{n+1} = (A+B)(A+B)^n = (A+B)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$$

On peut toujours distribuer et arriver à $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A.A^kB^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B.A^kB^{n-k}$ mais on ne peut pas "regrouper" les puissances de B si A et B ne commutent pas.

2) Matrices inversibles :

a) Définition :

Définition 7

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est dite **inversible** si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$AB = BA = I$$

B est unique. Elle est appelée "inverse de A" et est notée A^{-1}

▷ *Preuve :* Il faut montrer l'unicité :

◁

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque :

L'inverse de matrice n'est défini que pour les matrices carrés : il faut pouvoir à la fois calculer AB et BA, donc pour que le produit soit compatible à chaque fois, les matrices doivent être carrées.

On admet le résultat suivant, qui permet de gagner du temps :

Proposition 6

Soit A une matrice est carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = I_n$ alors A inversible d'inverse B.

b) Propriétés :

Propriété 2

Soient A et B deux matrices inversibles, alors

(i) A^{-1} est inversible avec $(A^{-1})^{-1} =$

(ii) AB est inversible avec $(AB)^{-1} =$

(iii) ${}^tA$ est inversible avec $({}^tA)^{-1} =$

▷ *Preuve :*

◁

c) Cas particulier des matrices 2x2 :

Théorème 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $\det(A) = ad - bc$. *Alors A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$ *et on a*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Le nombre $\det(A)$ *est appelé "déterminant" de la matrice A.*

▷ *Preuve :* le sens <= est facile : on vérifie que la matrice proposée convient en faisant le produit par A.
Le sens => se fait par contraposition avec le chapitre suivant (système) : on admet pour le moment.

◁

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $\det(A) =$:

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $\det(B) =$

Ainsi :

Technique à retenir :

"On intervertit la première diagonale, on oppose la deuxième et on divise le tout par le déterminant."

IV Matrices et Python

Pour manipuler les matrices en Python, on utilise la bibliothèque numpy. Ainsi, pour représenter la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, on écrit :

```
import numpy as np
A = np.array([[1,2,3],[0,1,4],[5,6,0]])
```

On peut effectuer les opérations habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire avec les opérateurs + et * :

```
B = np.array([[7,8,9],[1,0,2],[3,4,5]])
C = A + B
print(C)
D = 2 * A
print(D)
```

Cependant, A*B ne correspond pas au produit matriciel. Essayez la commande, que fait cette opération ?
Pour effectuer un produit matriciel, on utilise la fonction `np.dot(A,B)` ou l'opérateur `@` :

```
E = np.dot(A,B)
print(E)
F = A @ B
print(F)
```

Python permet de faire plusieurs autres opérations sur les matrices. Je vous fais un tableau récapitulatif des principales fonctions utiles, et de leur application sur la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(je rappelle que l'on a défini A en Python par la commande `A = np.array([[1,2,3],[0,1,4],[5,6,0]])`) :

Fonction	**Effet**	**Exemple sur A**
`np.sum(A)`	Somme de tous les éléments	`np.sum(A)` $\to 22$
`np.min(A)`	Élément minimum	`np.min(A)` $\to 0$
`np.max(A)`	Élément maximum	`np.max(A)` $\to 6$
`np.mean(A)`	Moyenne de tous les éléments	`np.mean(A)` $\to 2.44$
`np.cumsum(A)`	Sommes cumulées	`np.cumsum(A)` $\to [1, 3, 6, 6, 7, 11, 16, 22, 22]$
`np.median(A)`	Médiane de tous les éléments	`np.median(A)` $\to 2$
`np.transpose(A)`	Transposée $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	`np.array([[1,0,5],[2,1,6],[3,4,0]])`
`np.eye(n)`	Matrice identité de taille $n \times n$	`np.eye(3)` $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
`np.zeros((n,p))`	Matrice nulle de taille $n \times p$	`np.zeros((2,3))` $\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
`np.ones((n,p))`	Matrice de taille $n \times p$ remplie de 1	`np.ones((2,3))` $\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On utilisera aussi la bibliothèque `numpy.linalg` pour des opérations plus avancées, qu'on appellera avec

```
import numpy.linalg as al
```

Fonction	**Effet**
`al.inv(A)`	Si A est inversible, retourne son inverse A^{-1}
`al.rank(A)`	Rang de la matrice A
`al.matrix_power(A, n)`	A^n
`al.solve(A, b)`	Résout le système $Ax = b$ s'il admet une solution
`al.eig(A)`	Valeurs propres et vecteurs propres de A (voir en fin d'année)