Chapitre 7

Systèmes d'équations linéaires

I Généralités

1) Vocabulaire :

a) Définition

Définition 1

Soit n et p deux entiers naturels. On appelle système linéaire de n équations à p inconnues tout système d'équations d'inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots\dots\dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les coefficients a_{ij} et les termes $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$.
Les coefficients $b_1, b_2, \dots, b_n$ constituent ce qu'on appelle le "second membre du système" ou "membre de droite du système".

Exemples :
$S_1 : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ est linéaire et $S_2 : \begin{cases} 4x^2 + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ n'est pas linéaire.

b) Systèmes équivalents :

Définition 2

Deux systèmes S et S' sont dit équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

Exemple :
$S_1 : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ est équivalent à $S_2 : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x = -2y \end{cases}$ et équivalent à $S_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Notation :
On note alors $S_1 \iff S_2 \iff S_3$.

c) Systèmes particuliers :

Définition 3

Un système est dit homogène si tous les b_i sont nuls.

$S_1 : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ est homogène ; $S_2 : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ ne l'est pas.

2) Interprétation matricielle

a) Construction :

Soit (S) un système de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots\dots\dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Posons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots\cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. Alors $AX =$

Ainsi $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est solution de (S) si et seulement si la matrice X est solution de $AX = B$.

Définition 4

La matrice A définie précédemment est dite "associée" au système S.
Elle ne dépend pas du second membre.

b) Exemple :

$S_1 : \begin{cases} 3x + y &= 1 \\ x + 2y &= 2 \end{cases}$ a pour matrice associée

L'équation matricielle associée est :

c) Représentation matricielle d'un système

On utilisera parfois une écriture matricielle pour résoudre un système :
$\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ -2x + y - z &= 4 \\ x + 7y + 2z &= 7 \end{cases}$ peut se représenter sous la forme :

3) Systèmes et matrices étagés

a) Matrices étagées

Définition 5

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice (de taille quelconque, pas forcément carrée...). Elle est dite étagée (ou échelonnée) si elle vérifie les deux conditions suivantes :
- *il existe un entier $0 \leq r \leq n$ tel que les r premières lignes sont non nulles, et les suivantes (s'il y'en a) sont nulles.*
- *Les lignes $L_1, L_2, \ldots, L_r$ commencent par de plus en plus de zeros.*

Remarque : la première ligne peut commencer par aucun zero. En revanche la deuxième ligne commence par au moins un zero .

Exemples :
Les matrices suivantes sont-elles étagées ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Définition 6

Le nombre r (qui est le nombre de lignes non nulles dans la matrice étagée) est appelé "rang" de la matrice.
On appelle alors "pivot" le premier coefficient non nul de chaque ligne d'une matrice étagée.

Exemples :
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a pour pivots et est de rang .
$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pour pivots est et de rang .

Remarque :
Dans le cas où le système est étagé avec tous les pivots égaux à 1, on dit que le système est normalisé.

b) Systèmes étagés et rang

Définition 7

Un système est dit étagé si sa matrice associée est étagée. Son rang est alors le rang de la matrice et il correspond aussi au nombre de lignes non nulles (hors second membre) dans le système étagé.

Exemples :
$\begin{cases} 3x+y &= 1 \\ x+2y &= 2 \end{cases}$ n'est pas étagé, mais $\begin{cases} 3x+y &= 1 \\ -5y &= -5 \end{cases}$ l'est et est de rang 2.

La matrice associée à un système ne prend pas en compte le second membre.
Pour savoir si le système est étagé, il faut donc ne regarder que le premier membre du système, pas le second. De même, le rang ne dépend pas du second membre.
Ainsi :

$$\begin{cases} 3x+y+z &= 1 \\ -3y+z &= -5 \\ 0 &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3x+y+z &= 1 \\ -3y+z &= -5 \\ 0 &= 1 \end{cases}$$

sont tous les deux des systèmes étagés, de rang 2.

c) Résolution d'un système étagé

Un système étagé se résout très facilement (et toujours !) par substitution :

Exemples :
1. Une situation "idéale" :

$$\begin{cases} 3x+y+z &= 1 \\ 2y+2z &= 2 \\ z &= 3 \end{cases}$$

2. Situation rang plus petit que le nombre d'inconnues :

$$\begin{cases} 4x+y+z &= 2 \\ y-z &= 0 \end{cases}$$

Le rang est 2, il y a 3 inconnues : il y a alors $3-2=1$ inconnue qui servira de paramètre.
Pour ne pas risque de prendre une mauvaise, on part de la dernière ligne, et on choisi l'une des deux. Par habitude, on prend celle tout à droite.
On indique alors que z est quelconque en précisant "$z \in \mathbb{R}$" et on remplace ensuite dans chaque ligne, en partant du bas :

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}(1-z) \\ y &= z \\ z &\in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. Situation d'incompatibilité :

$$\begin{cases} 3x+y+z &= 1 \\ 2z &= 2 \\ 0 &= 3 \end{cases}$$

Ce système est étagé de rang 2, mais la dernière ligne est impossible.
Ce système n'admet donc pas de solution.

II Résolution d'un système par la méthode du pivot de Gauss

1) Opération équivalentes

On s'autorise uniquement les opérations suivantes sur les lignes :

(i) Echanger les lignes i et j : opération notée "$L_i \leftrightarrow L_j$"

(ii) Multiplier une ligne par un scalaire non nul : "$L_i \leftarrow \alpha L_i$"

(iii) Ajouter à une ligne une autre ligne : "$L_i \leftarrow L_i + L_j$".

(iv) Remplacer L_i par une combinaison linéaire de L_i et L_j avec un coeff non nul pour L_i : "$L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$" (avec $\alpha \neq 0$).

On ne peut pas faire plusieurs opérations (iii) et (iv) à la fois.

Exemples :

Toutes ces opérations sont bijectives (on peut les inverser facilement) : on obtient donc des systèmes équivalents.
Remarque : on peut faire les mêmes opérations sur les matrices. On admet que cela revient à multiplier par certaines matrices....

2) Algorithme et rang

Théorème 1

Tout système d'équations linéaires (ou toute matrice...) peut se ramener à un système (ou à une matrice) étagé via des opérations équivalentes.
En outre, le nombre de lignes non nulles obtenues par cette méthode ne dépend pas des choix d'opération effectuées : ce nombre est appelé rang du système (ou de la matrice associée...) et est habituellement noté r.
Le rang d'un système est toujours inférieur au nombre d'équations et au nombre d'inconnues : $r \leq n$ et $r \leq p$.

▷ *Preuve :* L'algorithme ci-dessous donne une idée de la preuve ; il suffit de faire une récurrence pour se rendre compte que l'on obtient un système étagé. On admet l'unicité du rang. ◁

Méthode : *Réduction d'un système par pivot de Gauss*

On présente l'algorithme :

1. On "trie" les lignes du système de manière à mettre en première ligne une ligne qui commence par la première inconnue.
2. On utilise la ligne L_1 pour "supprimer" les autres inconnues.
   Pour chaque ligne L_i, on cherche des coefficients a et b tel que l'opération aL_1+bL_2 fait disparaitre la première inconnue.
3. On recommence les étapes 1 et 2 en prenant cette fois L_2 et la deuxième inconnue (sans toucher la ligne L_1), puis L_3 et la troisième inconnue (sans toucher ni la ligne L_1, ni L_2) et ansi de suite.

L'algorithme s'arrête quand on arrive à la dernière ligne ou inconnue.

On dit qu'on a alors "réduit" le système via le pivot de Gauss.

Exemple :

$$\begin{cases} x+2y+z &= 1 \\ -2x+y-z &= 4 \\ x+7y+2z &= 7 \end{cases}$$

3) Bilan des cas possibles :

Après réduction via le pivot de Gauss, un système d'équations de n équations à p inconnues devient un des cas suivants (à l'ordre des inconnues près) :

Allure du système	Rang	Solutions
$\begin{cases} a_{11}\mathbf{x_1}+ & a_{12}\mathbf{x_2}+ & \dots & a_{1n}\mathbf{x_n} & = b_1 \\ & a_{22}\mathbf{x_2}+ & \dots & a_{2n}\mathbf{x_n} & = b_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn}\mathbf{x_n} & = b_n \end{cases}$	$r = n = p$	Quel que soit le second membre, un unique n-uplet solution.
$\begin{cases} a_{11}\mathbf{x_1}+ & a_{12}\mathbf{x_2}+ & \dots & +a_{1r}\mathbf{x_r} & \dots & +a_{1p}\mathbf{x_p} & = b_1 \\ & a_{22}\mathbf{x_2}+ & \dots & +a_{2r}\mathbf{x_r} & \dots & +a_{2p}\mathbf{x_p} & = b_2 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots & \\ & & & a_{rr}\mathbf{x_r} & +\dots & +a_{rp}\mathbf{x_p} & = b_r \\ & & & & & 0 & = 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & = 0 \end{cases}$	$r < p$	Infinité de solutions : il y a $p-r$ inconnues "en trop" qui deviennent des paramètres. On exprime les r premières en fonction de ces $p-r$ autres. Il y a souvent plusieurs choix de variables paramètres possibles, et il n'y a pas forcément les lignes de $0=0$.
$\begin{cases} a_{11}\mathbf{x_1}+ & a_{12}\mathbf{x_2}+ & \dots & +a_{1r}\mathbf{x_r} & \dots & +a_{1n}\mathbf{x_p} & = b_1 \\ & a_{22}\mathbf{x_2}+ & \dots & +a_{2r}\mathbf{x_r} & \dots & +a_{2n}\mathbf{x_p} & = b_2 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots & \\ & & & a_{rr}\mathbf{x_r} & +\dots & +a_{rp}\mathbf{x_p} & = b_r \\ & & & & & 0 & = b_{r+1} \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & = b_n \end{cases}$ avec au moins un des coefficients $b_i \neq 0$ pour $i \geq r+1$	$r \leq p$	Pas de solution : le système est dit "incompatible".

III Application aux matrices :

1) Motivation théorique :

a) Idée :

On sait que si A est inversible, alors $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.
Or lorsqu'on résout un système, on peut l'écrire sous la forme $AX = B$.
Si un X est possible, on devrait pouvoir le trouver grâce à A^{-1}...

b) Théorème clé

Théorème 2

Soit (S_0) un système carré, homogène, de matrice associée A.
A est inversible si et seulement si pour tout second membre B, le système (S) constituée de S_0 avec second membre B admet une unique solution.

Plus précisément, si le système s'écrit sous la forme $AX = B$ avec B quelconque, alors après résolution X s'écrit sous la forme CB où C est une matrice de la même taille que A. On a alors $C = A^{-1}$.

▷ *Preuve* : admis. ◁

c) Inversion des matrices 2x2 :

On rappelle le résultat donné dans le chapitre sur les matrices :

Théorème 3

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $\Delta = ad - bc$. Alors A est inversible si et seulement si $\Delta \neq 0$ et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

▷ *Preuve :* ◁

2) Méthode pour des matrices de taille supérieure :

a) Résolution du système

On résout un système avec un second membre générique. Les solutions sont de la forme $A^{-1}B$ et on "identifie" la matrice A^{-1}.
Exemple :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Méthode du miroir

On utilise l'écriture sous forme de matrice augmentée
Exemples : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$