Chapitre 8

Polynômes

I L'ensemble $\mathbb{R}[x]$

1) Généralités

a) Définition

Définition 1

Une fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est appelée fonction polynôme (ou simplement "polynôme") à coefficients dans $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ et $n+1$ éléments $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, P(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

Remarque et Notation : La définition telle que proposée aujourd'hui en ECG est très problématique, elle amène une confusion entre $P(x)$ et $P : x \mapsto P(x)$. Anciennement, pour désigner l'application $x \mapsto x^k$, on utilisait la notation X^k, avec un grand "X" (c'est encore le cas dans tous les programmes pas écrits avec les pieds).
Ainsi, on pourra simplement écrire $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$ pour désigner la fonction polynomiale $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, ce qui la distinguera de la fonction polynôme en un point x (quand on écrit $P(x)$).

Le programme d'ECG ne mentionne plus cette notation, mais elle reste très fréquente.

Définition 2

- *On appelle monôme de degré k tout polynôme de la forme ax^k avec $a \neq 0$.*
- *Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Le nombre a_i est appelé "coefficient d'indice i" du polynôme.*
- *L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[x]$.*

Exemples :

- $P(x) = 1 + 2x + 4x^4$ est un polynôme. Son coefficient d'indice 0 est , celui d'indice 4 est et son coefficient d'indice 5 est .
- $P(x) = x^5$ est un monôme degré 5.

b) Égalités de polynômes

Proposition 1

Aux coefficients nuls prêts, l'écriture d'un polynôme, rangé par degrés des monômes, est unique.
Autrement dit : deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

▷ *Preuve :*

◁

Remarque :
"Aux coefficients nuls prêts" signifie que l'on peut avoir des coefficients a_k nuls (mais invisibles).
Par exemple $x^4 + x + 1 = x^4 + 0x^3 + x + 1 = 0x^{42} + x^4 + x + 1$

2) Opérations algébrique sur les polynômes

On définit sur les polynômes les mêmes opérations que sur les fonctions classiques. Néanmoins, la structure particulière des polynômes permet de donner des formules :

a) Somme

L'ensemble $\mathbb{R}[x]$ est stable par l'opération d'addition :

Proposition 2

Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}[x])^2$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ *et* $Q = \sum_{k=0}^{p} q_k x^k$, *avec* n *et* p *deux entiers. Quitte à compléter* P *ou* Q *par des* 0, *on peut supposer* $n = p$ *et écrire* $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k x^k$. *Alors la fonction* $P + Q$ *est un polynôme et on a :*

$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (p_k + q_k) x^k$$

Autrement dit, pour additionner des polynômes, on additionne les coefficients de même indice.
En outre, on a $P + Q = Q + P$.

Exemple :
Soient $P = 3x^2 + 4x + 1$ et $Q = 5x^3 + 2x$ alors $P + Q =$

Remarque :
Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, on peut calculer λP qui est également un polynôme (il suffit de multiplier tous les coefficients de P par λ).
En combinant cette propriété avec la somme, on obtient que toute combinaison linéaire de polynômes est un polynôme, c'est à dire :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[x], \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}[x]$$

b) Produit

L'ensemble $\mathbb{R}[x]$ est stable par l'opération de multiplication :

Proposition 3

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{p} q_k x^k$, avec n et p deux entiers. Alors la fonction PQ est un polynôme et on a :

$$PQ(x) = \sum_{k=0}^{n+p} c_k x^k \qquad \text{avec } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

▷ *Preuve :*

◁

Remarques.

1. L'écriture $\sum_{i+j=k}$ sous-entend que l'on fait la somme pour tous les entiers i et j tels que $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq p$ avec $i + j = k$. Par exemple,

$$c_1 = p_0 q_1 + p_1 q_0,$$
$$c_2 = \quad ,$$
$$c_3 =$$

2. On peut aussi écrire $c_k = \sum_{i=0}^{k} p_i q_{k-i}$ avec la convention que si $k - i < 0$ ou si $k - i > p$, le coefficient q_{k-i} est nul.

Exemples

Pour calculer le produit de polynômes, on peut organiser directement notre calcul par degré

▶ $(2x^2 + 3x + 1)(x - 2) =$

▶ $(x^3 + 2x^2 + 1)(2x^2 - x + 3) =$

Corollaire 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[x]$. On définit la puissance n-ème de P, notée P^n, par

$$P^0 = 1 \quad \text{et} \quad ,\forall n \geq 1, P^n = P.P^{n-1}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, P^n est un polynôme.

▷ *Preuve :* C'est une récurrence assez simple... ◁

c) Composition

Définition 3

Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}[x]$. On définit le polynôme composé de Q par P, noté $P \circ Q$ ou $P(Q)$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P \circ Q(x) = P(Q(x))$

Exemple
$P(x) = x^2 + x + 1$ et $Q(x) = 3x + 1$, alors

$P \circ Q = P(Q) =$

Méthode : *composition $P \circ Q$*
Il s'agit de remplacer dans $P(x)$ le x par $Q(x)$. On développe si besoin.

Proposition 4

La composée de deux polynômes est un polynôme.

▷ *Preuve* : Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{m} q_k x^k$, alors

◁

3) Degré d'un polynôme

a) Définitions

Définition 4

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_i x^i$ un polynôme.
On appelle degré de P, noté $deg(P)$, le plus grand p tel que $a_p \neq 0$.
Par convention, $deg(0) = -\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple :
- $P(x) = 5x^2 - 1$ est de degré . Ainsi $P \in$
- $Q(x) = \sin(\pi)x^5 + 3x^2 + 3$ est de degré .

Définition 5

Soit P un polynôme non nul, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. On définit les termes suivants :
- *Terme dominant : le monôme **non nul** de plus haut degré.*
- *Coefficient dominant : le coefficient du terme dominant.*
- *Terme constant : le coefficient du terme de degré 0.*

Exemple
- Soit $P(x) = 3x^5 + 2x + 1$.
  Son terme dominant est

  Son coefficient dominant est

  Son terme constant est
- Le polynôme $Q(x) = \ln(1)x^4 + x^2 + 3x$ est de terme dominant et de terme constant

b) Opérations et degré

Proposition 5

Soient P et Q deux polynômes.

1. *$deg(P+Q)$*
2. *si $deg(P) \neq deg(Q)$, $deg(P+Q)$*
3. *$deg(PQ)$*
4. *$deg(P \circ Q)$*

▷ *Preuve* : Toutes ces propriétés se montrent de manière similaire, en écrivant les polynômes sous forme développée. Par exemple pour la somme :

◁

Remarque :
si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$, alors la première propriété donne $deg(P+Q) \leq n$. Ainsi $P+Q = \mathbb{R}_n[x]$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $deg(\lambda P) = n$ si $\lambda \neq 0$, où $-\infty$ si $\lambda = 0$.
Dans tous les cas $deg(\lambda P) \leq n$, donc $\lambda P \in \mathbb{R}[x]$
On dit alors, comme pour les matrices, que $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel.

II Division et racines dans $\mathbb{R}[x]$

1) Division

a) Division euclidienne

Proposition 6

Soient A et B deux polynômes avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) avec $deg(R) < deg(B)$ tels que

$$A = BQ + R$$

On dit qu'on a effectué la division euclidienne de A par B, que Q est le quotient et R le reste de la division.

▷ *Preuve* :

◁

En pratique
On pose la division euclidienne comme on le faisait pour les nombres entiers en primaire :
Exemple : division de $x^4 + 3x^2 - 4x + 1$ par $x^2 + 1$

b) Divisibilité

Définition 6

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[x]$.
On dit que B divise A (et on note $B|A$) si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $A = BQ$ (autrement dit, le reste par la division euclidienne est nul).
On dit alors que B est un diviseur de A, ou que A est un multiple de B.

Exemple :
soit $A = x^4 - 1$ et $B = x^2 - 1$. On a $A = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ donc

Proposition 7

(i) $\forall A \in \mathbb{R}[x], A|A$
(ii) $\forall A \in \mathbb{R}[x], A|0$
(iii) $\forall A, B, C \in \mathbb{R}[x]$,*si* $A|B$ *et* $B|C$, *alors* $A|C$
(iv) si $B|A$ *avec* $A \neq 0$, *alors* $deg(B) \leq deg(A)$ *(attention : faux avec* $A = 0$*)*

▷ *Preuve :*

◁

2) Racines

a) Racines et divisibilité

Définition 7

On appelle racine du polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ tout nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$

Théorème 1

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

α est racine de P si et seulement si $(x - \alpha)$ divise P.

▷ *Preuve :*

◁

Corollaire 2

Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont p racines distinctes d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, alors le polynôme P est divisible par $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_p)$

▷ *Preuve :* Intuitivement assez clair. Se démontre par récurrence. ◁

b) Théorème fondamental sur le nombre de racines d'un polynôme

Théorème 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Si P admet au moins $n + 1$ racines distinctes, alors P est nul.

En conséquence : un polynôme de degré n ne peut admettre plus de n racines distinctes.

▷ *Preuve :*

◁

Corollaire 3

Un polynôme qui admet une infinité de racines est nul.

Exemple :
La fonction sin n'est pas un polynôme puisque tous les nombres de la forme $x_k =$ avec $k \in \mathbb{Z}$ vérifient $\sin(x_k) = 0$: il y aurait une infinité de racines alors que sin n'est pas nulle...

3) Racines multiples

Définition 8

Soit P un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que α est racine d'ordre de multiplicité k si et seulement si on peut écrire

$$P = (x-\alpha)^k Q$$

où Q est un polynôme tel que $Q(\alpha) \neq 0$.

Autrement dit, l'ordre de multiplicité d'une racine α est la plus grande puissance possible de $(x-\alpha)$ qui divise P.

Définition 9

α est dit "racine multiple" d'un polynôme P si la racine α est d'ordre au moins 2.
Si α est racine d'ordre 1, on dit que c'est une racine simple.
Si α est racine d'ordre 2, on parle de racine double.

Exemple :
2 est racine double de $P(x) = (x-2)^2(x+1)$
Soit $P(x) = x^3 - 3x + 2$. Quel est l'ordre de la racine $\alpha = 1$?

Remarques :

- Si α est tel que $P(\alpha) \neq 0$, alors α n'est pas racine.
  On peut quand même écrire $P = (x-\alpha)^0 P$, donc d'après la définition, α est une racine d'ordre 0... sans être une vraie racine. En pratique, on parlera rarement de racine d'ordre 0...
- Si $P = 0$ alors tout $\alpha \in \mathbb{R}$ est racine. Mais pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 = (x-a)^k O$: il n'y pas de puissance maximale. Dans ce cas là, on ne donne pas d'ordre pour les racines du polynôme nul.

III Dérivation et factorisation

1) Dérivation

a) Stabilité par dérivation

Proposition 8

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Alors P est dérivable avec $P' \in \mathbb{R}[x]$ et

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

▷ *Preuve* : Il suffit de montrer que la dérivée de x^k est kx^{k-1} ce que l'on fera dans un prochain chapitre. ◁

Propriété 1

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, *alors* $deg(P') =$ *si* , *et* $deg(P') =$ *si*

b) Dérivées successives

Définition 10

Soit f *une fonction et* $n \in \mathbb{N}$. *On définit* $f^{(n)}$, *la dérivée* n*-ième de* f *par*

$$\begin{cases} & f^{(0)} = f \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{si } f^{(n-1)} \text{ existe et est dérivable}, & f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \end{cases}$$

Autrement dit, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = (f')' = f''$, et ainsi de suite : $f^{(n)}$ signifie qu'on a dérivée n fois la fonction f.

Exemple
Soit $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 1$ alors

$P' =$

$P^{(2)} =$

$P^{(3)} =$

$P^{(4)} =$

Si P est un polynôme de degré n, alors $P^{(k)} = 0$ pour tout $k > n$.
On peut aussi remarquer que $P^{(n)} = n!a_n$ où a_n est le coefficient dominant de P. (dans l'exemple précédent, $P^{(3)} = 3! \times 2$.)
Ceci donne une formule assez utile :

c) Formule de Taylor pour un polynôme :

Théorème 3

Soient $n \in \mathbb{N}$ *et* $P \in \mathbb{R}_n[x]$.
Alors $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$

Avec un changement de variable, on montre ensuite la version générale :

Corollaire 4

Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{R}_n[x]$ *et* $a \in \mathbb{R}$.
Alors $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$

Remarque :
Il serait assez calculatoire de prouver ce résultat pour l'instant, tandis que ce sera enfantin quand nous aurons attaqué le cours sur les espaces vectoriels. Attendez vous donc à voir cette preuve en DM/exo à un moment de l'année !

2) Dérivation, somme,produit et composition

On a, comme de manière générale avec des fonctions dérivables, les résultats suivants :

Proposition 9

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
- $(\lambda P)' = \lambda P'$,
- $(P+Q)' = P' + Q'$,
- $(PQ)' = P'Q + Q'P$,
- $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$.

3) Racine multiple et dérivation

Proposition 10

Soit α une racine d'ordre $k > 0$ d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$. Alors α est racine d'ordre $k-1$ de P'.

▷ *Preuve :*

◁

Corollaire 5

α est racine multiple d'un polynôme P si et seulement si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$

Remarque :
On généralise facilement par récurrence cette "baisse" d'ordre : si α est d'ordre m, alors α est d'ordre $m-2$ pour P'', $m-3$ pour $P^{(3)}$, etc. Ainsi pour tout $k \leq m$, α est racine d'ordre $m-k$ de $P^{(k)}$.
Cela fourni donc un algorithme de recherche de l'ordre de multiplicité :

Proposition 11

Soit un polynôme P et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est racine d'ordre m si et seulement si $P^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Exemple
On veut l'ordre de la racine 2 dans $P(x) = x^3 - x^2 + x - 6$:

4) Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$

a) Enoncé :

Proposition 12

Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$ avec $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois réels et $a \neq 0$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors,

- *si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racine réelle et ne peut pas se factoriser.*
- *si $\Delta = 0$, alors P admet une racine double, $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et on a*

$$P(x) = a(x - x_0)^2$$

- *$\Delta > 0$, P admet deux racines réelles distinctes :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

On peut factoriser P sous la forme :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si ce résultat est relativement simple à montrer en utilisant la forme canonique, le théorème ci dessous est nettement plus difficile :

Théorème 4

Dans $\mathbb{R}[x]$, tout polynôme de degré $n \geq 1$ peut s'écrire comme produit de polynômes qui sont :

— *soit de degré 1,*

— *soit de degré 2 et à discriminant $\Delta < 0$.*

? Le saviez-vous ? *Le théorème de d'Alembert-Gauss*



Les polynômes ont été largement étudiés en mathématiques et une avancée majeure a été proposée par Jean Le Rond d'Alembert.
Né des amours "illégitimes" d'un chevalier avec une marquise en 1717, il est abandonné sur le parvis de la chapelle de "Saint Jean Le Rond", à laquelle il doit son nom.
Elevé par une famille de vitriers, il reçoit en secret de son père biologique une pension qui lui permettra l'accès à une solide éducation en lettre et en droit. Néanmoins, c'est vers les mathématiques et la physique qu'il se dirige une fois ses études terminées.
En 1745, il se lance avec Diderot dans la rédaction de l'Encyclopédie. Parmi les 1700 articles qu'il écrit, se trouve un résultat fondamental sur les polynômes : tous les polynômes de degré supérieur à 1 admettent au moins une racine (éventuellement complexe) et se factorisent sous la forme de produit de polynômes de degré 1.
La preuve qu'il donne dans l'Encyclopédie s'avère néanmoins fausse, et elle est corrigée par Carl Friedrich Gauss au 19e siècle. Le théorème porte ainsi aujourd'hui le nom des deux auteurs.

b) Utilisation des racines évidentes et de la "division euclidienne"

On veut factoriser $P = x^3 + x^2 - 5x + 3$. On remarque que 1 est racine et on effectue la division par $x - 1$:

$P = x^3 - 8$

$P = x^4 - x^3 + x^2 - x$

c) cas des "bicarrés"

Dans certaines situations, on peut se ramener à des polynômes de degré 2, ou faire apparaitre des identités remarquables :
$P = x^4 - x^2 - 2$

$P = x^4 + x^2 + 4$

A noter : *Et dans les autres cas ?*

Nous disposons de formules pour trouver les racines de polynômes de degré 2. Il en existe pour le degré 3 et pour le degré 4 (méthode de Cardan, méthode de Lagrange, ...), mais ces méthodes sont hors programmes d'ECG.

Pour les polynôme de degrés 5 ou plus, il a été démontré qu'on ne peut pas trouver de formule !

Cela signifie que si on vous demande de factoriser des polynômes de degré supérieur ou égal à 3, c'est qu'il y a des racines évidentes, une factorisation évidente (via des identités remarquables) ou un changement de variable qui permet de faire cette factorisation. Dans tous les autres cas, l'exercice vous guidera.