Chapitre 11

Continuité

I Fonctions continues

1) Définitions

a) Continuité en un point

Définition 1

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soit f une fonction définie sur I (et donc en x_0). On dit que f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe.

On a alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Définition 2

On dit que f est continue sur un ensemble D si et seulement si $\forall x \in D$, f est continue en x

Notation : on note $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ (ou simplement $\mathcal{C}(D)$) l'ensemble des fonctions continue sur D à valeur dans $\mathbb{R}$.

Exemples :
On peut montrer, à partir de la définition des limites, que les polynômes sont des fonctions continues et que $x \mapsto \dfrac{1}{x} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. On peut ensuite prouver que la plupart des fonctions usuelles (cos, sin, exp, ln, etc...) sont continues.

Remarque :
On appelle domaine de continuité d'une fonction f le plus grand ensemble D sur lequel la fonction f est continue.

b) Continuité à droite ou à gauche

Définition 3

On dit que f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$

(resp. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$)

Proposition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ouvert, et soit $x_0 \in I$ alors f est continue en x_0 ssi f est continue à droite et à gauche

Application :
Ce théorème fourni une technique pratique pour étudier la continuité en un point x_0 :

$$f \text{ continue en } x_0 \text{ si et seulement si } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Exemple :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 \text{ si } x \geq 0,\ f(x) = \sin x \text{ si } x < 0.$$

La continuité sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ est claire.
En 0 :

2) Calcul et continuité

a) Opérations usuelles :

Proposition 2

Soit f et g deux fonctions continues sur D et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

1. *$f + g$ est continue sur D*
2. *λf est continue sur D*
3. *fg est continue sur D*
4. *$\dfrac{f}{g}$ est continue en tout point de D où g ne s'annule pas*

▷ *Preuve* : Immediat par propriété calculatoire sur les limites. ◁

Application :
Les polynômes et les quotients de polynômes sont des fonctions continues sur leur ensemble de définition.
En effet, un polynôme est une fonction de la forme $x \mapsto \sum_{k=0} n a_k x^k$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels.
Or les fonctions constantes sont évidemment continues, et $x \to x$ est continue également.
Par produit de fonctions continues (et par récurrence), pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^k$ est continue.
Par multiplication par un scalaire, $x \mapsto a_k x^k$ est continue, et par somme de fonctions continues, P est donc continue.
Enfin, si Q est une fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$ avec P_1 et P_2 des polynômes, alors Q est continue par quotient de fonctions continues.

b) Composition

Proposition 3

Soif $f : D \to G$ continue sur D et $g : H \to I$ continue sur H avec $D \subset H$, alors

$$g \circ f : D \to I \text{ est continue sur } D$$

▷ *Preuve* : C'est la composition de limite... ◁

Exemple :
Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$.

II Théorèmes autour de la continuité

1) Théorème des valeurs intermédiaires

a) Enoncé :

Théorème 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins un) c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = y$

Ce théorème se généralise facilement au cas où a ou b sont infinis en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{a} f$ et $\lim\limits_{b} f$.

▷ *Preuve :*

◁

b) Exemple d'application : recherche de 0 de fonctions par dichotomie

Soit f continue sur un intervalle $[a, b]$. On cherche x tel que $f(x) = 0$.
Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$: le problème est résolu.
Si par exemple $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors comme 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, par le théorème des valeurs intermédiaire il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$: le problème a au moins une solution.
Posons $m = \dfrac{a+b}{2}$. On calcule $f(m)$. Si $f(m) < 0$, alors f s'annule dans $[m, b]$. On recommence à l'étape précédente en posant $a = m$.
Si $f(m) > 0$, alors f s'annule dans $[a, m]$ et on recommence en posant $b = m$
Si $f(m) = 0$, alors on s'arrête.
A chaque étape, la taille de l'intervalle est divisée par 2, ce qui fait qu'en n étape, on trouve un zero de f à $\dfrac{b-a}{2^n}$ près : c'est une estimation très précise et rapide !

2) Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 2

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I. Alors l'ensemble des images de I par f, noté $f(I)$ est un intervalle.

▷ *Preuve :*

◁

Un corollaire immédiat est le suivant :

Théorème 3 (*Théorème des bornes atteintes*)

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé ($a, b \in \mathbb{R}$), alors $f(I)$ est un intervalle de la forme $[\alpha, \beta]$ avec $\alpha = \min_{x \in I} f(x)$ et $\beta = \max_{x \in I} f(x)$
Autrement dit : sur tout intervalle fermé et borné, f est bornée et atteint ses bornes : il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) = \min f$ et $x_2 \in [a, b]$ tel que $f(x_2) = \max f$.

▷ *Preuve :* On admet, la preuve utilise des suites bien choisies et des suites extraites de celles-ci. Rassurez-vous, vous l'aurez en DM, je ne compte pas vous laisser sur votre faim ! ◁

Danger ! *Importance de la fermeture de l'intervalle*

Pour la deuxième partie du théorème, le fait que l'intervalle soit fermé est essentiel. On a des contre exemples pour les cas non fermés :

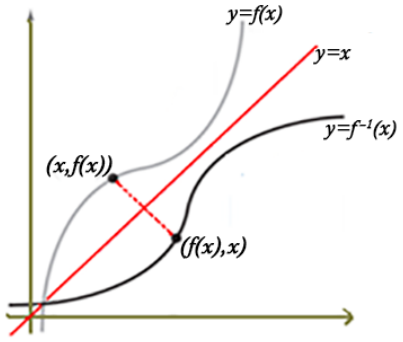
- Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. La fonction f est continue sur $]0, 1]$, mais l'image de $]0, 1]$ est $[1, +\infty[$: elle n'est pas bornée.
- Soit $f : x \mapsto x^2$. La fonction f est continue sur $]-1, 1[$ et l'image de $]-1, 1[$ est $[0, 1[$. Ainsi, la fonction est effectivement bornée, mais la borne 1 n'est pas atteinte sur $]-1; 1[$.

Exemple d'utilisation :
C'est ce qu'on utilise en permanence quand on "lit" un tableau de variation pour donner l'image d'un intervalle....
Soit par exemple $f(x) = x^2 - 3x + 2$. On veut déterminer l'image de l'intervalle $[-1, 1]$.

3) Continuité et bijections :

Rappels : Soit $f : E \to F$ une application

1. f est dite bijective si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.
2. Ainsi, pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
3. On note f^{-1} l'application qui à y associe cet unique x. Ainsi $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
4. Le point $(x, f(x))$ est sur la courbe de f si et seulement si $(f(x), x)$ est sur la courbe de f^{-1} (puisque $f^{-1}(f(x)) = x$) : ainsi les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$:



Théorème 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si f est strictement monotone, alors f est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
En outre, l'application réciproque, f^{-1} est également continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

▷ *Preuve :*
On a déjà tout démontré : il reste juste la continuité mais on l'admet. ◁

Exemples :

- Comme $x \mapsto x^2$ est continue, $x \mapsto \sqrt{x}$ l'est aussi. De manière générale, les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sont continues (comme réciproques de $x \mapsto x^n$).
- tan est continue, donc arctan l'est également.
- ln est continue, donc exp est continue.

III Utilisation de la continuité : exemples de suites implicites et de suites définies par récurrence

1) Exemple de suites implicites :

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. *Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique dans $[1, n]$ qu'on notera x_n.*

   On ne peut pas résoudre cette équation par le calcul et on ne peut donc pas avoir d'expression pour x_n. On sait seulement que $f(x_n) = n$.

2. *Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geq 1}$ puis sa limite.*

3. *Montrez que pour tout $n \geq 1$, on a : $f(n-\ln(n)) \leq n$. En déduire que $n-\ln(n) \leq x_n$.*

4. *Déterminer* $\lim \dfrac{x_n}{n}$.

2) Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue

a) Point de départ :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I fermé, éventuellement infini, avec $f(I) \subset I$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Remarquons déjà que la suite est bien définie : en effet, si $u_n \in I$, alors $f(u_n) \in f(I) \subset I$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ et la suite sera toujours définie.

Exemple :
Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 10 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

La suite est bien définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f : x \mapsto$$

Etudions f :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bien définie :

b) Représentation graphique :

On va représenter les termes successifs de la suite en traçant le graphe de f et la droite d'équation $y = x$, en suivant le protocole suivant :

- On place u_0 sur l'axe des abscisses.
- On obtient u_1 en calculant $f(u_0)$: graphiquement, on va donc chercher le point de la courbe de f au dessus de u_0. L'ordonnée du point obtenu est u_1.
- On reporte u_1 sur l'axe des abscisses. Pour ça, on passe par la droite $y = x$ (qui comme son équation l'indique, fait correspondre abscisse et ordonnée...)
- On calcule maintenant u_2 en rejoignant la courbe de f à partir de u_1

▶ On reporte u_2 sur l'abscisse, et on continue ainsi...

Exemple :
Reprenons notre exemple précédent

$$\begin{cases} u_0 &= 10 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

Cela donne :

On peut conjecturer le comportement de la suite :

c) Quelques pistes d'études :

A partir de la représentation faite de la suite, on essaie de démontrer les propriétés repérées, et on utilise les propriétés connues sur les limites de suite, combinée avec la continuité.
En particulier, on utilisera beaucoup la chose suivante :

Propriété 1 (*utilisation directe interdite : à redémontrer à chaque fois*)

Soit f continue sur un intervalle I fermé et stable par f (c'est-à-dire $f(I) \subset I$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ, alors $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$.
On dit que ℓ est un point fixe.

▷ *Preuve :*

◁

Dans les exercices, le guide est souvent "inclus", mais voici un plan fréquent (d'autres sont possibles et on suivra toujours le guide proposé par l'énoncé)

Méthode : *Grandes lignes de l'étude*

Etape 1 : on étudie la fonction f en cherchant les points suivants :

1. Tableau de variation
2. Intervalles stables par f. (ie vérifiant $f(I) \subset I$)
3. Point fixe de f en étudiant le signe et les zeros de g définie par $g(x) = f(x) - x$.

Etape 2 : discuter en fonction de u_0 le comportement de la suite, en cherchant les points suivants :

1. Est-elle bornée ?
2. Est-elle monotone ?

Etape 3 : conclure avec les théorèmes de croissance monotone et en reliant aux points fixes.

Exemples :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

► $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

Danger ! *f croissante ne veut pas dire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante*
Dans l'exemple qu'on vient de voir : si $u_0 = 10$, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, et si $u_0 = 0$, on a u_n croissante.
Dans les deux cas, f est pourtant croissante !
Ce qui compte, c'est en fait la position de $f(x)$ par rapport à x.

► $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$