Complément de cours 1

Suites extraites et convergence

I Suites extraites

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si il existe une fonction

$$\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \textbf{ strictement croissante}$$

telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\Phi(n)}.$$

La fonction Φ s'appelle alors ***l'extractrice*** *associée à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

En termes simples, cela signifie qu'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui ne garde que certains termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples :

— La suite des termes pairs, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de même que la suite des termes impairs d'extractrices respectives

$$\Phi : n \mapsto 2n \text{ et } \Psi : n \mapsto 2n+1$$

— La suite $(u_{n^2+7})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour extractrice

$$\Phi : x \mapsto x^2 + 7.$$

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\cdots$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites extraites en nombre fini de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associées à des extractrices Φ_1, $\Phi_2, \cdots$, Φ_m. On dit que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\cdots (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***recouvrent*** *la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout n entier, il existe un entier k et une des extractrices Φ_p telle que*

$$\Phi_p(k) = n.$$

Remarque :
Cette définition un peu barbare représente en fait une idée très simple : il suffit que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ apparaisse dans au moins une des sous-suites.

Exemple :

— La suite des termes pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et celle des termes impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ forme un recouvrement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Les suites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ forment un recouvrement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

II Convergence et suites extraites

Dans le cours, nous avons vu qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l si et seulement si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l.
En fait, ce résultat se généralise de la façon suivante :

Théorème 1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\cdots$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui forment un recouvrement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et soit $l \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } l \iff \begin{cases} v_n \to l \\ w_n \to l \\ \vdots \\ z_n \to l \end{cases}$$

▷ *Preuve :* Puisqu'on a un **si et seulement si** à prouver, on doit montrer les deux sens, vous commencez à être habitués à ça !
Je vais commencer par donner une idée de la preuve avec des mots, avant de refaire tout au propre puisque je ne peux pas vous l'expliquer au tableau.

$\Longrightarrow$: Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, à partir d'un certain rang tous les termes de la suite seront proches de l ; en particulier ce sera le cas pour les termes des suites extraites.
$\Longleftarrow$: Puisque toutes les suites extraites convergent vers l, et qu'il y a un nombre fini de telles suites, à partir d'un certain rang toutes les suites extraites **à la fois** seront proches de l, et en particulier comme tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans l'une des suites extraites, ils seront proches de l. Il va falloir bien écrire les choses ici, mais voilà l'idée ! Essayez de bien comprendre l'idée avant de passer à la preuve formelle, vous pouvez vous faire un dessin.

Preuve au propre :
$\Longrightarrow$: Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon) \qquad (*)$$

Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l (c'est identique pour toutes les autres suites extraites).
Notons Φ_1 l'extractrice associée à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de telle sorte que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{\Phi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Notons N le rang donné par (*)
Puisque Φ_1 est strictement croissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Phi_1(n) \geq n.$$

En particulier,

$$(n \geq N) \implies (\Phi_1(n) \geq N) \implies (l - \varepsilon < u_{\Phi_1(n)} < l + \varepsilon) \implies (l - \varepsilon < v_n < l + \varepsilon)$$

et on a donc bien $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l.

$\Longleftarrow$: Supposons que les suites extraites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\cdots$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes vers l. On a donc, en notant $\Phi_1, \cdots, \Phi_r$ les extractrices associées :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1) \Rightarrow (l - \varepsilon < u_{\Phi_1(n)} < l + \varepsilon) \qquad (1)$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2) \Rightarrow (l - \varepsilon < u_{\Phi_2(n)} < l + \varepsilon) \qquad (2)$$
$$\vdots$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_r \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_r) \Rightarrow (l - \varepsilon < u_{\Phi_r(n)} < l + \varepsilon) \qquad (r)$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ et montrons que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon).$$

Notons $N_1,\ N_2, \cdots, N_r$ les rangs donnés par (1), (2), ... , (r). Considérons
$N = \max(\Phi_1(N_1), \cdots, \Phi_r(N_r))$.
Soit alors $n > N$. Puisque les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\cdots$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un recouvrement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un k et un m tels que $n = \Phi_k(m)$. Puisque $N > \Phi_k(N_k)$, et que les extractrices sont croissantes, on a $m > N_k$.

Mais alors, par (k), on a que $(m \geq N_k) \Rightarrow (l - \varepsilon < u_{\Phi_k(m)} < l + \varepsilon)$ et donc

$$l - \varepsilon < u_{\Phi_k(m)} < l + \varepsilon$$

d'où

$$l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon.$$

Finalement, on a bien récupéré ce que l'on souhaitait, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. ◁

Un autre théorème utile avec les suites extraites est le suivant (il est plus facile à pouver que ce que l'on vient de voir, je vous propose d'essayer de le prouver vous-mêmes !)

Théorème 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et soit l un réel. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conerge vers l si et seulement si toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.