Complément de cours 2

Ensembles dénombrables et différents infinis

I Introduction

Quand on considère un ensemble fini (en mathématiques ou dans la vie en général), l'une des premières informations que l'on cherche à récupérer est le nombre d'éléments dans cet ensemble (combien y-a-t-il d'élèves dans cette classe ? combien de vaches dans ce troupeau ?). Pour obtenir cette information, on va souvent compter les éléments de cet ensemble, c'est-à-dire qu'on va mettre cet ensemble en bijection avec l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ où n sera alors le nombre d'éléments de l'ensemble :

Élève n°1, élève n°2, ... , élève n°n.

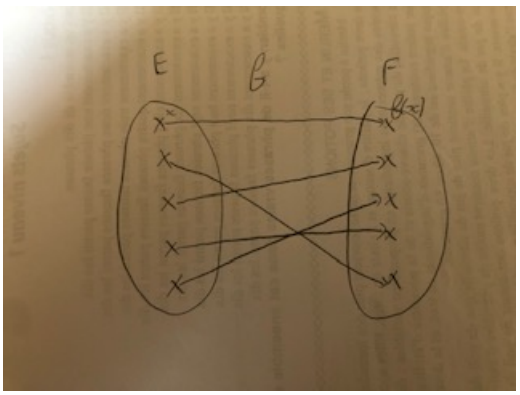
L'application qui à chaque élève associe son numéro est donc une bijection de la classe vers l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$.
On peut alors parler d'une classe qui serait plus grande qu'une autre si elle contient plus d'élèves, et cette information de taille est très utile. Une question naturelle qui se pose alors est la suivante :
Peut-on élargir cette notion de taille aux ensembles infinis ? Tous les ensembles infinis sont-ils de même taille ?
Cette question, posée (et résolue) par le mathématicien **Georg Cantor** (on l'a déjà présenté dans le chapitre sur les bijections), a débouché sur une branche toute entière de mathématiques, la théorie des ensembles, et sur de nombreux résultats d'une beauté époustouflante.
Dans ce petit morceau de cours, on s'intéressera aux ensembles **dénombrables**, ceux dont on peut compter les éléments, et on verra que les intervalles de réels contiennent plus d'éléments que $\mathbb{N}$, répondant ainsi à la question "tous les infinis sont-ils de même taille ?"
On utilisera beaucoup la notion d'être dénombrable en probabilités, d'où ce rapide complément de cours introductif.

II Rappel sur les bijections

On rappelle que $f : E \mapsto F$ est une bijection si :

$$\forall y \in F, \exists!\ x \in E,\ y = f(x).$$

La situation est donc la suivante (représentée dans le cas où E et F sont finis) :



On voit que pour compter le nombre d'éléments de F il suffit de compter celui de E. Cela peut aussi permettre de labeliser les éléments de F : élément n°1, élément n°2, ...
Je rappelle que la composée $g \circ f$ de deux bijections $f : E \to F$ et $g : F \to G$ est une bijection de E vers G. Là encore, vous pouvez faire un dessin avec des ensembles finis pour vous en convaincre.

III Définition et premiers exemples

Définition 1

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ vers E.

Les ensembles dénombrables sont donc ceux où l'on peut compter les éléments, c'est le premier infini auquel on pense.

Remarque :
Les ensembles dénombrables sont donc infinis ; on s'intéresse en fait souvent aux ensembles **dénombrables ou finis**, et par abus de langage vous trouverez parfois *dénombrable* utilisé pour *dénombrable ou fini*.

Exemples :
- L'ensemble $\mathbb{N}$ est évidemment dénombrable, en prenant comme bijection l'identité
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est aussi dénombrable, en prenant comme bijection

$$f : n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Il est possible de montrer le résultat suivant, très utile en pratique :

Théorème 1

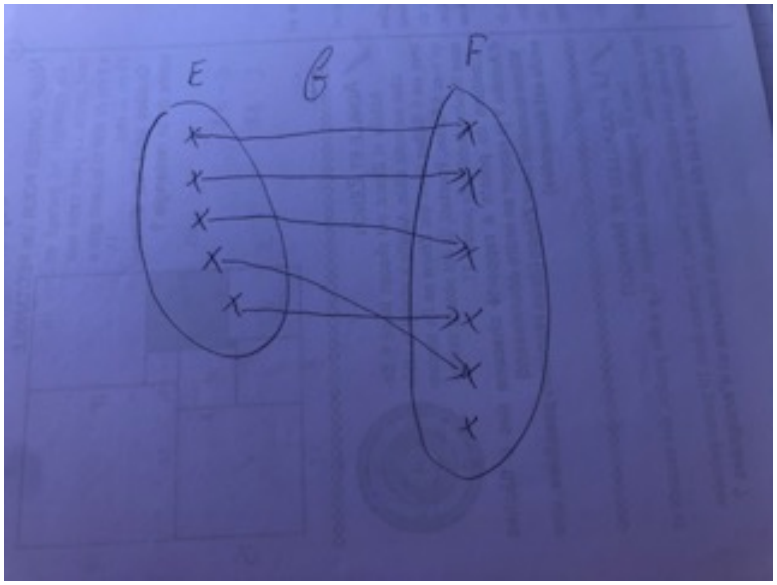
Un ensemble E est dénombrable si et seulement si il existe une injection f de E dans $\mathbb{N}$ et une injection g de $\mathbb{N}$ dans E.

De manière plus générale, ce théorème peut se formuler de la façon suivante :

Théorème 2

Soient E et F deux ensembles. Il existe une bijection de E dans F si et seulement si il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E.

Remarque :
Je ne vais pas donner la preuve de ce théorème, qui est un peu technique, mais je voudrais donner une idée de la raison pour laquelle ça marche dans le cas d'ensembles finis :
S'il existe une injection de E dans F, alors F a au moins autant d'éléments que E ; la situation est la suivante, avec chaque flèche qui pointe vers un élément différent :



De même, s'il existe une injection de F dans E, alors E a au moins autant d'éléments que F. Mais alors, E et F ont le même nombre d'éléments et on peut bien les mettre en bijection.

Ce résultat permet de montrer que plusieurs autres ensembles sont dénombrables :

— L'ensemble des nombres rationnels (i.e. des fractions) $\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable. En effet, $g : n \mapsto n$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$, et on a aussi

$$f : \frac{p}{q} \mapsto \begin{cases} 2^p 3^q & \text{si } p \text{ est positif} \\ 5^{-p} 3^q & \text{si } p \text{ est négatif.} \end{cases}$$

qui est une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.

— Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. Je vous laisse réfléchir à une preuve de celle-là, je vous ferai un exercice là-dessus pour ceux que la question intéresse (c'est un classique)

On a montré que plein d'ensembles sont dénombrables, est-ce le cas de tous ? La réponse est non ! C'est ce qu'on va voir dans la prochaine partie.

IV Un intervalle de $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Théorème 3

Soient a et b deux réels. Alors :

l'intervalle $[a, b]$ n'est pas dénombrable.

En particulier, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (et donc il y a des infinis plus gros que d'autres).

▷ *Preuve :* Il y a plusieurs très belles preuves de ce résultat, je vais en proposer une ici reposant sur l'*argument de la diagonale de Cantor*, je vous en propose une autre dans le devoir maison de vacances que vous recevrez sous peu.

On va montrer le résultat pour l'intervalle $[0, 1]$. Il est très facile de trouver une bijection entre deux intervalles de $\mathbb{R}$ (par exemple $f : x \mapsto a + x(b - a)$ est une bijection de $[0, 1]$ vers $[a, b]$), et donc puisque la composée de deux bijections est une bijection, $[a, b]$ est dénombrable si et seulement si $[0, 1]$ l'est.

On va raisonner par l'absurde et supposer que $[0, 1]$ est dénombrable. Notons donc $\phi : \mathbb{N} \to [0, 1]$ la bijection donnée par le fait d'être dénombrable.
Les éléments $\phi(0), \phi(1), \cdots$ sont donc des éléments de $[0, 1]$; par exemple on aura donc

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0,\mathbf{2}13532\cdots \\ \phi(1) &= 0,\mathbf{3}08694\cdots \\ \phi(2) &= 0,49\mathbf{3}612\cdots \\ \phi(3) &= 0,697\mathbf{5}21\cdots \end{aligned}$$

(les décimales peuvent évidemment être différentes).
On considère alors, pour chaque $\phi(n)$, r_n la $n+1$-ième décimale de $\phi(n)$. Je les ai mises en gras sur l'exemple. Ici on aurait donc $r_0 = 2,\ r_1 = 0,\ r_2 = 3,\ r_3 = 5\cdots$.
Considérons alors le nombre réel

$$x = 0,0100\cdots \text{ (par rapport à l'exemple donné)}$$

dont la $n+1$-ième décimale est 0 si $r_n \neq 0$ et 1 sinon.
L'argument est maintenant de dire que, puisque ϕ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $[0, 1]$, comme $x \in [0, 1]$, on a l'existence d'un entier m tel que :

$$x = \phi(m).$$

Ceci n'est pas possible car la $m+1$-ème décimale de x et celle de $\phi(m)$ sont différentes par construction. Donc x ne peut être l'image de personne, ce qui prouve qu'il n'existe pas de bijection entre $[0, 1]$ et $\mathbb{N}$. ◁