Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique dans $[1,\, n]$ qu'on notera x_n.

   On ne peut pas résoudre cette équation par le calcul et on ne peut donc pas avoir d'expression pour x_n. On sait seulement que $f(x_n) = n$.

2. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geq 1}$ puis sa limite.

3. Montrez que pour tout $n \geq 1$, on a : $f(n - \ln(n)) \leq n$. En déduire que $n - \ln(n) \leq x_n$.

4. Déterminer $\lim \frac{x_n}{n}$.

1. **Existence et unicité de x_n :**

   f est définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$.

   Donc f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}^{*+}$.

   De plus, f est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ (somme de fonctions continues).

   Calculons $f(1)$ et $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$:

   - $f(1) = 1 + \ln(1) = 1 + 0 = 1$
   - $f(n) = n + \ln(n) \geq n$ car $\ln(n) \geq 0$ pour $n \geq 1$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(1) = 1 \leq n \leq n + \ln(n) = f(n)$.

   D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, comme f est continue sur $[1, n]$ et $n \in [f(1), f(n)]$, il existe $x_n \in [1, n]$ tel que $f(x_n) = n$.

   De plus, comme f est **strictement croissante**, cette solution est **unique**.

   Vous pouvez aussi dire : comme f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est bijective de cet intervalle sur $]-\infty, +\infty[$ par le théorème de la bijection. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_n) = n$. Et comme $f(1) \leq n \leq f(n)$, on a $x_n = f^{-1}(n) \in [1, n]$ par croissance de f^{-1}.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in [1, n]$.

2. **Monotonie de $(x_n)_{n\geq 1}$:**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n + 1$.

   Comme $n < n + 1$, on a $f(x_n) < f(x_{n+1})$.

   Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, donc $x_n < x_{n+1}$.

   La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est **strictement croissante**.

   Limite de $(x_n)_{n\geq 1}$:

   $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante, donc elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

   Supposons par l'absurde que $\ell < +\infty$. Alors $(x_n)_{n\geq 1}$ est majorée par ℓ.

   On aurait alors $f(x_n) \leq f(\ell)$ pour tout n (car f croissante).

Mais $f(x_n) = n \to +\infty$, ce qui est contradictoire avec $f(x_n) \leq f(\ell)$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty.}$

3. **Montrons que $f(n - \ln(n)) \leq n$ pour $n \geq 1$:**

Pour pouvoir passer au ln, il faut que l'argument soit strictement positif.

Pour $n \geq 1$, on veut donc $n - \ln(n) \geq 1 > 0$. On étudie donc $g(n) = n - \ln(n) - 1$ sur $[1, +\infty[$:

Cette fonction est dérivable avec

$$g'(n) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \geq 0$$

pour $n \geq 1$. Donc g est croissante sur $[1, +\infty[$. De plus, $g(1) = 1 - \ln(1) - 1 = 0$. Donc pour $n \geq 1$, $g(n) \geq g(1) = 0$, c'est-à-dire $n - \ln(n) \geq 1 > 0$. Ainsi, pour $n \geq 1$, on peut calculer $f(n - \ln(n))$.

Calculons $f(n - \ln(n))$:

$$\begin{aligned} f(n - \ln(n)) &= (n - \ln(n)) + \ln(n - \ln(n)) \\ &= n - \ln(n) + \ln(n - \ln(n)) \end{aligned}$$

On a alors :

$$f(n - \ln(n)) \leq n \iff n - \ln(n) + \ln(n - \ln(n)) \leq n$$

$$\iff \ln(n - \ln(n)) \leq \ln(n)$$

$$\iff n - \ln(n) \leq n \text{ car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+}$$

C'est évident car $\ln(n) \geq 0$ pour $n \geq 1$.

Donc $\boxed{\forall n \geq 1, f(n - \ln(n)) \leq n}$

Déduction de $n - \ln(n) \leq x_n$:

On a $f(n - \ln(n)) \leq n = f(x_n)$.

Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, on en déduit :

$\boxed{n - \ln(n) \leq x_n}$

4. **Limite de $\frac{x_n}{n}$:**

D'une part, on a $x_n \leq n$ (par définition, $x_n \in [1, n]$), donc :

$$\frac{x_n}{n} \leq 1$$

D'autre part, d'après la question 3, $x_n \geq n - \ln(n)$, donc :

$$\frac{x_n}{n} \geq \frac{n - \ln(n)}{n} = 1 - \frac{\ln(n)}{n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ (croissances comparées).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right) = 1$.

Par le **théorème d'encadrement** :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1}$$