Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire

1 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 2
1.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels 2
1.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels . . . 3
1.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires 4
1.4 Somme de p sous-espaces vectoriels 5
1.5 Somme directe de p sous-espaces vectoriels 6
1.6 Sous-espaces vectoriels supplémentaires 7

2 Matrices et applications linéaires 8
2.1 Matrice d'une application linéaire 8
2.2 Matrices de passage 9
2.3 Changement de bases 10

3 Matrices semblables 12
3.1 Retour sur les projecteurs 13

4 Trace d'une matrice carrée 14

5 Polynômes d'une matrice ou d'un endomorphisme 16
5.1 Puissance d'une matrice / d'un endomorphisme. . 16
5.2 Polynôme d'une matrice/d'un endomorphisme . . . 18
5.3 Polynômes annulateurs 21
5.3.1 Définition et exemples 21
5.3.2 Application au calcul de l'inverse 23
5.3.3 Application au calcul de puissances 24

6 Suites de matrices 25

Mickaël Postic - Inspiré de Mathieu Mansuy et Coralie Renault
Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
Page personnelle : `mickael.postic.eu/`
E-mail : `mickael.postic@ac-besancon.fr`

Dans tout le chapitre, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, n, p, q et r des entiers supérieurs ou égaux à 1. On reprend toutes les notations d'ECG1, se référer à vos cours de l'an dernier si besoin.

1 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels

Commençons par des rappels du cours d'ECG1:

1.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on appelle *somme de F et G*, et on note $F+G$, l'ensemble :

$$F+G=\{x+y,\ x\in F,\ y\in G\}.$$

Ainsi :

$$z\in F+G \quad\Leftrightarrow\quad \exists (x,y)\in F\times G,\quad z=x+y.$$

Propriété 1

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 2

Si F et G sont de dimension finie, alors $F+G$ est de dimension finie. De plus :

$$\dim(F+G)\leq \dim(F)+\dim(G).$$

Remarque. On peut montrer plus précisément que :

$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) \qquad (\textit{formule de Grassmann})$$

Le saviez-vous ?

Hermann Grassmann (1809-1877) est l'un des grands mathématiciens « malheureux » du 19ème siècle. En 1839 dans sa thèse sur la *Théorie des flots et des marées*, il établit les fondements de la théorie des espaces vectoriels et de l'algèbre linéaire. Ces travaux, bien que révolutionnaires, n'auront que peu d'échos chez ses contemporains. Le rapporteur de sa thèse ayant à lire un essai remarquablement long, en bâcle la lecture en quatre jours et en rate complètement l'importance fondamentale. En 1844, son ouvrage majeur *La science des grandeurs extensives ou la théorie de l'espace*, première publication importante dans le cadre de la théorie des espaces vectoriels, passe aussi pratiquement inaperçu.



Hermann Grassmann (1809-1877)

Ce n'est que bien plus tard que viendra la reconnaissance pour Grassmann. D'abord par William Rowan Hamilton qui lui rend hommage dans son ouvrage de 1853 sur les quaternions. C'est ensuite Hermann Hankel et Félix Klein, enthousiasmés par ses théories, qui le recommandent à l'Académie des sciences de Göttingen en 1871. Ses travaux sont reconnus par Peano en 1888, trente ans après leur première publication.

1.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition.

On dit que la somme $F+G$ est *directe* si pour tout $z \in F+G$, la décomposition $z = x+y$ avec $x \in F$ et $y \in G$ est unique, c'est-à-dire :

$$\forall z \in F+G, \quad \exists!(x,y) \in F \times G, \quad z = x+y.$$

On note alors $F \oplus G$.

Propriété 3 (Caractérisations des sommes directes)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors il y a équivalence entre :

(1) F et G sont en somme directe ;

(2) $F \cap G = \{0_E\}$;

(3) $\forall (x,y) \in F \times G,\ x+y = 0_E \Rightarrow x = y = 0_E$.

Preuve.

(1) $\Rightarrow$ (2) On suppose que la somme est directe. Soit $z \in F \cap G$. Montrons que $z = 0_E$. Pour cela, écrivons :

$$z = \underbrace{z}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{z}_{\in G}.$$

Par unicité de l'écriture dans une somme directe, il suit que $z = 0_E$. Ainsi $F \cap G \subset \{0_E\}$. Et l'autre inclusion est immédiate puisque $F \cap G$ est un s.e.v.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$, et soit $(x,y) \in F \times G$ tel que $x+y = 0_E$. Alors :

$$\underbrace{x}_{\in F} = \underbrace{-y}_{\in G}.$$

Ainsi x et y appartiennent à $F \cap G = \{0_E\}$, soit $x = y = 0_E$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Montrons que $F+G$ est directe. Prenons pour cela $z \in F+G$. Il existe $(x,y) \in F \times G$ tel que :

$$z = x+y \qquad (*)$$

On veut montrer que cette décomposition est unique. Prenons donc $(x',y') \in F \times G$ tel que :

$$z = x'+y' \qquad (**)$$

et montrons que $x = x'$, $y = y'$. Faisons pour cela $(*) - (**)$:

$$0_E = \underbrace{(x-x')}_{\in F} + \underbrace{(y-y')}_{\in G}.$$

En utilisant (3), on en déduit que $x - x' = 0_E$ et $y - y' = 0_E$, soit encore $x = x'$ et $y = y'$.

□

Propriété 4 (Caractérisations en dimension finie)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases de F et G. Il y a équivalence entre :

(1) F et G sont en somme directe ;

(2) la concaténation de $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est une base de $F+G$;

(3) $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

1.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont *supplémentaires dans* E si $E = F \oplus G$. Ce qui se récrit à l'aide de la caractérisation suivante :

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \forall z \in E,\ \exists!(x,y) \in F \times G,\ z = x + y.$$

Propriété 5 (Caractérisation des supplémentaires)

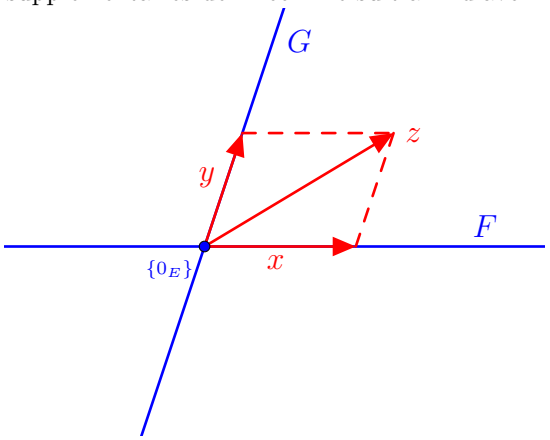
$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Théorème 6 (Caractérisations en dimension finie)

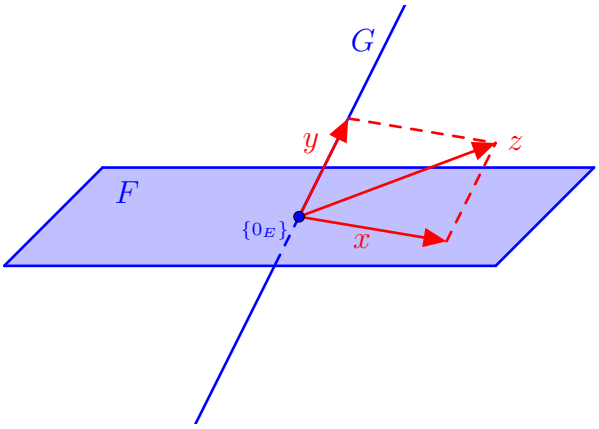
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre :

(1) $E = F \oplus G$ (2) $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$ (3) $\begin{cases} F + G = E \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$

Exemple. Même si E n'est pas $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on pourra malgré tout se représenter schématiquement des espaces supplémentaires de E comme suit afin d'avoir une vision géométrique de cette situation.



Représentation schématique de $E = F \oplus G$ dans $\mathbb{R}^2$.



Représentation schématique de $E = F \oplus G$ dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque. Un sous-espace vectoriel a en général plusieurs supplémentaires dans E. On parle donc d'**un** supplémentaire et non du supplémentaire.

Théorème 7

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$. Alors :

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \text{la concaténation de } \mathscr{B}_F \text{ et } \mathscr{B}_G \text{ est une base de } E.$$

On dit alors que la base de E ainsi obtenue en concaténant $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est *adaptée à la décomposition en somme directe* $E = F \oplus G$.

Propriété 8

Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

1.4 Somme de p sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On appelle *somme des* $F_1,\dots,F_p$ et on note $\sum_{i=1}^{p} F_i$ l'ensemble :

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \{x_1+x_2+\cdots+x_p,\ x_i\in F_i\}.$$

Ainsi :

$$x\in\sum_{i=1}^{p} F_i \quad\Leftrightarrow\quad \exists(x_1,\dots,x_p)\in F_1\times\cdots\times F_p,\quad x=x_1+\cdots+x_p.$$

Propriété 9

$\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve. Même preuve que dans le cas $p=2$. Je vous laisse l'écrire. □

Propriété 10

Si les F_i sont de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est de dimension finie et :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right)\leq\sum_{i=1}^{p}\dim(F_i).$$

Preuve. On prouve, comme dans le cas $p=2$, que la concaténation de bases des F_i est génératrice de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ pour conclure. □

1.5 Somme directe de p sous-espaces vectoriels

Définition.

Soit $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces d'un espace vectoriel E. On dit que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est *directe*, et on note $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, si :

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} F_i, \quad \exists!(x_1,\dots,x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad x = x_1 + \cdots + x_p.$$

Propriété 11

La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si, et seulement si :

$$\forall (x_1,\dots,x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad x_1 + \cdots + x_p = 0_E \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0_E.$$

Preuve. La preuve est identique au cas $p = 2$.

□

Théorème 12 (Caractérisations en dimension finie)

Soient $F_1,\dots,F_p$ p sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, et $\mathscr{B}_1,\dots,\mathscr{B}_p$ des bases respectives de ces espaces.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) les sous-espaces vectoriels $F_1,\dots,F_p$ sont en somme directe ;

(2) la concaténation des $\mathscr{B}_i$ est une base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$;

(3) $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

Preuve. La preuve est similaire au cas $p = 2$.

□

Remarque. Pour montrer que des sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe, on utilisera en pratique plutôt la caractérisation (2). Notons que la famille $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathscr{B}_i$ est par construction une famille génératrice de $\sum_{i=1}^{p} F_i$. Il s'agit donc de montrer que $\mathscr{B}$ est libre pour conclure.

1.6 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition.

Soit $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que les sous-espaces F_i sont *supplémentaires dans* E si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Ainsi, on dispose de la caractérisation :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E, \quad \exists!(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad x = x_1 + \cdots + x_p.$$

Propriété 13 (Caractérisations en dimension finie)

Soient $F_1, \dots, F_p$ p sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Si deux des trois assertions suivantes sont vérifiées :

(i) $E = \sum_{i=1}^{p} F_i$, (ii) $\sum_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, (iii) $\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$,

alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Propriété 14 (Caractérisations en dimension finie)

Soient $F_1, \dots, F_p$ p sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ des bases respectives de ces espaces.

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ si, et seulement si, la concaténation des $\mathscr{B}_i$ est une base de E.

Preuve.

□

L'intérêt de ces notions va être de construire des bases adaptées aux endomorphismes que nous allons étudier par la suite. Cela nous mène tout droit à la partie suivante.

2 Matrices et applications linéaires

On commence par remettre les définitions majeures, mais ça ne vous empêche pas de reprendre les cours d'ECG1.

2.1 Matrice d'une application linéaire

Définition.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie p et n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle *matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$*, notée $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$:

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} \quad \text{où} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

Remarque. $\dim(E)$ = nombre de colonnes de la matrice, $\dim(F)$ = nombre de lignes de la matrice.

Cas d'un endomorphisme. $E = F$, on prend alors la même base au départ et à l'arrivée $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, et pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on note plus simplement $M_{\mathscr{B}}(f) = M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Cette écriture matricielle est intéressante pour la raison suivante, permettant de passer des applications linéaires aux matrices et réciproquement. On peut ainsi utiliser les outils de l'algèbre linéaire pour étudier les applications linéaires, et inversement.

Propriété 15

Supposons E et F de dimension finie, et considérons $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases respectives de E et F. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x \in E$. Notons alors :

- A la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$;
- X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$;
- Y la matrice colonne des coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Alors :

$$Y = AX.$$

Finalement, je rappelle quelques résultats sur les matrices d'applications linéaires :

Propriété 16

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$.

- Si $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \mu \cdot M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g).$$

- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, alors :

$$M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = M_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times M_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

Corollaire 17

Soient E et F de dimension finie n et p, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases de E et F.

- L'application $\Phi_{\mathscr{B},\mathscr{C}} : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- Si E et F sont tous deux de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi de dimension finie et :

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Propriété 18

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension n munis respectivement des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

$$f \text{ est un isomorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \text{ est inversible.}$$

Et dans ce cas : $\left(M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1} = M_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right)$.

2.2 Matrices de passage

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $M_{\mathscr{B}}(f)$ et $M_{\mathscr{B}'}(f)$ sont a priori deux matrices différentes. Nous expliquons ici comment passer de l'une à l'autre.

Définition.

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

On appelle *matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$* la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$.

Plus précisément, si on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ et $P = (p_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, alors :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e'_1 & e'_2 & \ldots & e'_j & \ldots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \ldots & p_{1,j} & \ldots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \ldots & p_{2,j} & \ldots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \ldots & p_{n,j} & \ldots & p_{n,n} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array} \quad \text{où} \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i.$$

C'est donc la matrice des coordonnées de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ dans l'ancienne base $\mathscr{B}$.

Remarque. Par définition, on a $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$ puisque :

$$M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathrm{Id}(e'_1) & \ldots & \mathrm{Id}(e'_j) & \ldots & \mathrm{Id}(e'_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & \ldots & p_{1,j} & \ldots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & \ldots & p_{2,j} & \ldots & p_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \ldots & p_{n,j} & \ldots & p_{n,n} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}.$$

Mise en garde.

Dans les prépas scientifique, la définition retenue n'est pas la même. Attention donc si vous prenez des sujets/exercices issus de ces prépas (c'est assez classique).

Exercice. Considérons la famille $\mathscr{B} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1))$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, et écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_c$ à la base $\mathscr{B}$.

Propriété 19

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E de dimension finie. Alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible, d'inverse :

$$(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}.$$

Preuve.

□

2.3 Changement de bases

Propriété 20

Supposons E de dimension finie, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $x \in E$. Notons :

- X la matrice de x dans la base $\mathscr{B}$;
- X' la matrice de x dans la base $\mathscr{B}'$;
- P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Alors :

$$X = PX'.$$

Preuve.

□

Théorème 21 (*de changement de bases*)

Supposons E de dimension finie, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons :

- A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$;
- A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$;
- P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Preuve.

□

Exercice. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Écrire explicitement $f(u)$ pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, avec $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{C}$.
4. En déduire la matrice de f^n dans $\mathscr{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Matrices semblables

Le résultat précédent pousse à considérer la définition suivante :

Définition.

Soit A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que la matrice A *est semblable à* la matrice B lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à B, alors B est semblable à A, puisque :

On pourra donc plus simplement dire que A *et* B *sont semblables*, sans avoir à spécifier l'ordre.

Exercice. Quelles sont les matrices semblables à I_n, à $\lambda \cdot I_n$?



Propriété 22

(1) Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases distinctes.



(2) Deux matrices semblables ont même rang.

Preuve.

□

Mise en garde.

La réciproque est fausse : deux matrices de même rang ne sont pas forcément semblables. Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ sont de rang 2, mais elles ne sont pas semblables puisque la seule matrice semblable à I_2 est I_2.

3.1 Retour sur les projecteurs

On suppose que E est de dimension finie n.

Propriété 23

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est un projecteur de rang r ;

(2) il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle

$$M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ fois}}) = A_r \ ;$$

(3) $M_{\mathscr{B}}(f)$ est semblable à A_r.

Preuve.

□

Remarque. Il est donc aisé d'écrire la matrice d'un projecteur f dans une base adaptée à la somme directe $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$. Et pour obtenir la matrice de f dans une autre base, on appliquera les formules de changement de bases.

4 Trace d'une matrice carrée

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle *trace de* A, et on note $\text{Tr}(A)$, la somme de ses cœfficients diagonaux, c'est-à-dire :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i}.$$

Exemples. $\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right) =$, $\text{Tr}(I_n) =$, $\text{Tr}(0_n) =$

Propriété 24

L'application $\text{Tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \text{Tr}(A) \end{array}$ est une forme linéaire, c'est-à-dire :

$$\text{Tr}(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B),$$

pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Preuve.

□

Propriété 25

Soit A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$.
- $\mathrm{Tr}(A \times B) = \mathrm{Tr}(B \times A)$.

Preuve.

□

Pourquoi s'intéresser à la trace d'une matrice ? Parce que la trace est un invariant de similitude. Plus précisément :

Propriété 26

Si deux matrices sont semblables, **alors** elles ont même trace.

Preuve.

□

Exercice.

1. Les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?
2. Même question avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Mise en garde.

Comme l'illustre l'exercice précédent, la réciproque à la propriété est fausse : deux matrices de même trace ne sont pas forcément semblables.

5 Polynômes d'une matrice ou d'un endomorphisme

5.1 Puissance d'une matrice / d'un endomorphisme.

Définition.

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *puissance k-ème* de A la matrice, notée A^k, définie par :

- si $k = 0$, $A^0 = I_n$;
- si $k \geq 1$, $A^k = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois}}$.

On définit de même, pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, sa puissance k-ème, notée f^k, par :

- si $k = 0$, $f^0 = \mathrm{Id}_E$;
- si $k \geq 1$, $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Il y a un lien entre les puissances d'une matrice et les puissances d'un endomorphisme :

Propriété 27

Soit A une matrice et f un endomorphisme. Si A est la matrice de f dans une base donnée, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est la matrice de f^k dans cette base.

Preuve.

□

Propriété 28 (Puissance d'une matrice triangulaire ou diagonale)

Soit A une matrice triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure, resp. diagonale), dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & \cdots & \\ 0 & \lambda_2^p & (*) & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & (*) & \ddots & 0 \\ & \cdots & & \lambda_n^p \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

où $(*)$ sont des réels.

Remarque. On peut avoir $A^k = 0_n$ avec $A \neq 0_n$, comme dans l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$. Le plus petit tel entier p s'appelle l'**ordre de nilpotence** de la matrice.

De même, un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est dit **nilpotent** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_E$ et $f^{p-1} \neq 0_E$. Le plus petit tel entier p s'appelle l'**ordre de nilpotence** de l'endomorphisme.

Exemple.

- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre 2.
- La matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente d'ordre 4.

- L'endomorphisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par $f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, x_3, 0, 0)$ est nilpotent d'indice 3:



Pour aller plus loin.

Plus généralement, on peut montrer (on le fera en TD) que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure **stricte** ou triangulaire inférieure **stricte** est nilpotente d'ordre $\leq n$.

Remarque. De même que pour les matrices diagonales, le calcul des puissances d'une matrice nilpotente A d'ordre de nilpotence p est aisé, puisque pour tout $k \geq p$, $A^k = 0_n$. Il suffit donc de calculer un nombre fini de puissances de A.

Théorème 29 (*Formule du binôme de Newton* (1642 - 1727))

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} A^i B^{p-i}.$$



Le même résultat est valable pour deux endomorphismes f et g de $\mathscr{L}(E)$ qui **commutent :**

$$(f+g)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} f^i g^{p-i}.$$



Mise en garde.

Cette formule est **fausse si A et B ne commutent pas**. Vous serez sanctionné au concours si vous ne précisez pas que les matrices commutent avant d'utiliser la formule du binôme.



Méthode. Calcul de puissances par la formule du binôme de Newton.

*La formule du binôme de Newton, valable pour deux matrices **qui commutent**, permet dans certains cas de calculer les puissances d'une matrice.*

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Propriété 30 (Formule de Bernoulli)

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} A^p - B^p &= (A-B)\left(\sum_{i=0}^{p-1} A^i B^{p-1-i}\right) \\ &= (A-B)\left(A^{p-1}B^0 + A^{p-2}B^1 + \cdots + A^1 B^{p-2} + A^0 B^{p-1}\right). \end{aligned}$$

Là encore, le résultat est vrai pour deux endomorphismes f et g de $\mathscr{L}(E)$ qui **commutent :**

$$\begin{aligned} f^p - g^p &= (f-g)\left(\sum_{i=0}^{p-1} f^i g^{p-1-i}\right) \\ &= (f-g)\left(f^{p-1}g^0 + f^{p-2}g^1 + \cdots + f^1 g^{p-2} + f^0 g^{p-1}\right). \end{aligned}$$

Preuve.

□

5.2 Polynôme d'une matrice/d'un endomorphisme

Définition.

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ un polynôme à cœfficients dans $\mathbb{R}$, et soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = a_d A^d + \cdots + a_1 A + a_0 I_n.$$

De même, si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ défini par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = a_d f^d + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id}_E.$$

Exemple. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $P : x \mapsto x^2 + 3x - 10$, alors $P(A) = A^2 + 3A - 10I_n$.

Mise en garde.

Attention de ne pas se tromper : le terme constant a_0 dans P devient $a_0 I_n$ dans $P(A)$ ou $a_0 \mathrm{Id}_E$ dans $P(f)$.

Il y a un lien évident entre les polynômes d'une matrice et les polynômes d'un endomorphisme :

Propriété 31

Si A est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, alors $P(A)$ est la matrice de $P(f)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Preuve.

□

Propriété 32

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- $(\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A)$;
- $(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$.

Ici encore, le même résultat est valable pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$:

- $(\alpha P + \beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f)$;
- $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Remarque. Il est important de bien identifier les objets mathématiques concernés :

$$\big(\underbrace{P \times Q}_{\substack{\text{produit}\\ \text{de}\\ \text{polynômes}}}\big)(A) = \underbrace{P(A) \times Q(A)}_{\text{produit de matrices}}.$$

Exemple. Puisque $P(x) = x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$, il suit que $P(A) = (A + 5I_n)(A - 2I_n)$.

Propriété 33

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P, Q \in \mathbb{R}[x]$. Les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent :

$$P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A).$$

En particulier, A **commute avec toutes ses puissances et avec tous les polynômes en** A.
De même, si $f \in \mathscr{L}(E)$, les endomorphismes $P(f)$ et $Q(f)$ commutent :

$$P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f).$$

Preuve.

□

Propriété 34

Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables, et soit P inversible tel que $B = P^{-1}AP$.

(1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = P^{-1}A^kP$, et A^k et B^k sont semblables.

(2) Pour tout $Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$, et $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables.

Preuve.

□

Remarque. Pour le coup, ce résultat n'a pas d'analogue pour les endomorphismes puisque l'on n'a pas définit la notion "endomorphismes semblables".

5.3 Polynômes annulateurs

5.3.1 Définition et exemples

Définition.

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que P est un **polynôme annulateur de** A lorsque $P(A) = 0_n$.

De même, si $f \in \mathscr{L}(E)$, on dit que P est un **polynôme annulateur de** f lorsque $P(f) = 0_E$.

Là encore, toujours le même lien entre les polynômes annulateurs d'une matrice et ceux d'un endomorphisme :

Propriété 35

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et A sa matrice dans une base donnée. Alors P est un polynôme annulateur de f si et seulement si P est un polynôme annulateur de A.

Preuve.

□

Méthode. Détermination d'un polynôme annulateur non nul d'une matrice.

Pour déterminer un polynôme annulateur non nul d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on procèdera comme suit :

- *on calcule A^2 et on regarde si A^2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de A et I_n.*
- *Si ce n'est pas le cas, on tente d'écrire A^3 comme combinaison linéaire de A^2, A et I_n. Et ainsi de suite[a] ...*

On obtient ainsi $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(A) = 0_n$.

[a] On peut montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors A^n peut toujours s'écrire comme combinaison linéaire de $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I_n$ (résultat dû à Cayley). En pratique, nous n'aurons donc pas à calculer des puissances trop grandes de A pour en obtenir un polynôme annulateur non nul.

Exercice. Déterminer un polynôme annulateur non nul de $\lambda \cdot I_n$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $P : x \mapsto x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + (ad - bc)$ est un polynôme annulateur de A.

Le résultat suivant garantit l'existence de polynômes annulateurs non nuls pour toute matrice carrée ou tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie :

Propriété 36

(1) On suppose que E est de **dimension finie**.
Tout endomorphisme de E admet un polynôme annulateur non nul.

(2) Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet un polynôme annulateur non nul.

Preuve.



□

Propriété 37

Si A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables, **alors** elles ont les mêmes polynômes annulateurs.

Preuve.

□

5.3.2 Application au calcul de l'inverse

Propriété 38

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme annulateur de A. Alors :

$$P(0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ est inversible.}$$

De plus, A^{-1} est un polynôme en A.

De même, si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[x]$ est un polynôme annulateur de f, alors :

$$P(0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ est inversible.}$$

De plus, f^{-1} est un polynôme en f.

Mise en garde.

Ce ne sont que des impications ! On peut avoir A inversible sans que $P(0) \neq 0$.

Preuve.

□

Exercice. Déterminer l'inverse, s'il existe, de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut retrouver le résultat sur le déterminant des matrices 2x2 vu en première année :

Propriété 39

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On dispose de l'équivalence :

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc \neq 0.$$

Si de plus, A est inversible, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Preuve.

□

Vocabulaire. La quantité $ad - bc$ s'appelle le *déterminant de* A et se note $\det(A)$.

5.3.3 Application au calcul de puissances

La connaissance d'un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}_d[X]$ d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut permettre de calculer la puissance k-ème de A :

- soit à l'aide d'une division euclidienne de X^k par P ;
- soit par une récurrence en écrivant A^k comme combinaison linéaire de $I_n, A, \ldots, A^{d-1}$.

Des exemples seront traités en TD.

6 Suites de matrices

Les résultats qui suivent sont hors programme. Ils sont cependant souvent admis ou partiellement à redémontrer dans de nombreux sujets de concours.

Définition.

Une *suite* $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *de matrices* de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est la donnée, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'une matrice $A(n)$ de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, on note $a_{i,j}(n)$ le coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne de $A(n)$.

Exemple. La suite $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $A(n) = \begin{pmatrix} 1+\frac{(-1)^n}{2^n} & 3+\frac{1}{n+1} \\ 0 & 1-\frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$.

Définition.

On dit qu'une suite $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ converge vers $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!], \quad \lim_{n\to+\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}.$$

Exemple. En reprenant l'exemple précédent, la suite $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 40

- Soient $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B(n))_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ qui convergent respectivement vers A et B, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

  Alors la suite $(\lambda \cdot A(n) + \mu \cdot B(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \cdot A + \mu \cdot B$.
- Soit $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ qui converge vers A, $(B(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ qui converge vers B.

  Alors la suite $(A(n) \times B(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A \times B$.

Preuve.

□

Exemple. Soit $(X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $X(n) = \begin{pmatrix} e^{-n} \\ 1+\dfrac{\sin(n)}{n+1} \end{pmatrix}$. La suite $(X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et donc $(A(n) \times X(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A \times X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.