Chapitre 2

Familles sommables, Variables aléatoires discrètes

1 Sommes doubles **2**
- 1.1 Sommes doubles indexées par un rectangle . . 2
- 1.2 Sommes doubles indexées par un triangle . . 2

2 Séries doubles **4**
- 2.1 Ensemble dénombrable infini 4
- 2.2 Familles indexées par un ensemble dénombrable infini 5
- 2.3 Sommation par paquets 5
  - 2.3.1 Théorème de sommation par paquets . 5
  - 2.3.2 Théorème de Fubini 6
  - 2.3.3 Sommation suivant les diagonales . . . 8

3 Moments d'une variable aléatoire discrète **9**
- 3.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète . . 9
- 3.2 Théorème de transfert 11
- 3.3 Moments d'ordre supérieur, variance 12

4 Espérance totale **14**

5 Lois discrètes usuelles **16**
- 5.1 Expériences associées aux différentes lois classiques. 16
- 5.2 Simulation en `Python` 17
- 5.3 Table des lois discrètes usuelles 17

Mickaël Postic - Inspiré de Mathieu Mansuy et Coralie Renault
Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
Page personnelle : `mickael.postic.eu/`
E-mail : `mickael.postic@ac-besancon.fr`

1 Sommes doubles

1.1 Sommes doubles indexées par un rectangle

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère une famille de réels indexée par deux indices $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$. On souhaite calculer la somme de tous les réels de cette famille, on la note $S = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j}$.

Propriété 1 (Somme double indexée par un rectangle)

Les égalités suivantes sont satisfaites :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Preuve. Disposons les $a_{i,j}$ dans un tableau à double entrée.

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=p$	
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,p}$	
$i=2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,p}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$i=n$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$a_{n,p}$	
					S

□

Propriété 2 (Produit de deux sommes)

Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_j)_{1\leq j\leq p}$ deux familles de nombres réels. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i b_j = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j.$$

Preuve.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_i b_j\right).$$

On est ramené à une somme double comme dans la proposition précédente. □

1.2 Sommes doubles indexées par un triangle

On suppose à présent que $n = p$, et on souhaite faire la somme de tous les coefficients se trouvant au dessus de la diagonale (comprise ou non).

Propriété 3 (Somme double indexée par un triangle)

On dispose des égalités suivantes :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}.$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}.$$

Preuve. De même, disposons les $a_{i,j}$ dans un tableau à double entrée. Mais cette fois le tableau est triangulaire : seuls sont pris en compte les éléments $a_{i,j}$ où $i \leq j$.

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=n$	
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	$\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}$
$i=2$		$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$	$\sum_{j=2}^{n} a_{2,j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$i=n$				$a_{n,n}$	$\sum_{j=n}^{n} a_{n,j}$
	$\sum_{i=1}^{1} a_{i,1}$	$\sum_{i=1}^{2} a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{n} a_{i,n}$	S

La deuxième égalité s'obtient en sommant les termes qui sont strictement au dessus de la diagonale. □

Méthode. Calcul d'une somme double indexée par un triangle.

Ces égalités ne sont pas à apprendre par cœur. Il faut savoir les retrouver en procédant ainsi :

(i) on choisit la variable sur laquelle on somme en premier, par exemple j. On écrit alors les sommes sans les bornes : $\sum_{i=}\left(\sum_{j=} a_{i,j}\right)$;

(ii) on détermine les bornes de la somme $\sum_{i=}$ *en regardant l'intervalle d'entiers parcouru par i. Ces bornes ne doivent pas dépendre de j ;*

(iii) on détermine enfin les bornes de la deuxième somme $\sum_{j=}$ *en fixant i et en regardant l'intervalle d'entiers parcouru par j. Cet intervalle dépend de i.*

Exercice. Calculer $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$.

2 Séries doubles

On souhaite dans cette partie définir la somme d'une « grosse » famille de nombres, dans le sens où cette famille n'est plus indexée par $\mathbb{N}$ mais par un ensemble plus « gros », par exemple par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Mais comment s'y prendre pour une telle famille ?

Tentons de nous inspirer du cas d'une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$. Pour une telle famille, nous avons sommé un nombre fini de termes (ce sont les sommes partielles), puis nous passions à la limite. Et comme il y a un ordre naturel sur $\mathbb{N}$, on sommait les éléments de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans cet ordre : d'abord u_0, puis u_1, puis u_2, etc.

Pour une famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, nous pouvons encore calculer des sommes finies, puis passer à la limite. Mais dans quel ordre sommer les termes de la famille ? Il n'y a aucun ordre naturel sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas un plus petit élément de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, puis un autre élément qui viendrait juste après, puis encore un autre, etc.

L'idée consiste à numéroter les éléments de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$: il y en aura donc un premier, puis un deuxième, etc, et nous pourrons donc les sommer dans cet ordre. Mais cela pose deux questions :

- Est-il possible de numéroter les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$? Cela nous mènera à la notion d'*ensemble dénombrable*.
- Si on décide d'une autre numérotation, obtient-on les mêmes résultats (convergence, valeur de la somme) ? Nous verrons que c'est effectivement le cas pour certaines familles dîtes *sommables*.



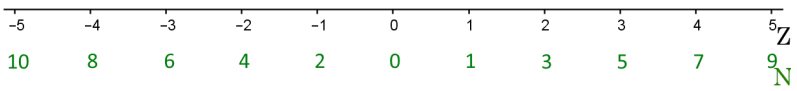
2.1 Ensemble dénombrable infini

Définition.

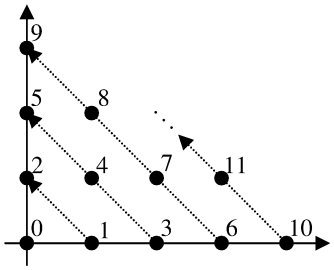
On dit qu'un ensemble I est *dénombrable infini* lorsqu'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans I c'est-à-dire lorsque I est un ensemble infini dont on peut énumérer les éléments, sans omission ni répétition.

Exemples.

- $\mathbb{N}$ est dénombrable : on peut énumérer $0, 1, 2, 3, \ldots$
- $\mathbb{Z}$ est dénombrable : on peut énumérer $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$



- $\mathbb{N}^2$ est dénombrable : on peut énumérer suivant les diagonales $(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), \ldots$



- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (résultat difficile dû au mathématicien Georg Cantor (1845 - 1918)).

Remarque. On admet que les manipulations ensemblistes classiques (produits finis, réunions dénombrables) d'ensembles dénombrables fournissent encore des ensembles dénombrables. Par exemple $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est aussi dénombrable.

2.2 Familles indexées par un ensemble dénombrable infini

Définition.

Soit I un ensemble dénombrable, et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexée par I.
On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est *sommable* s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$ telle que $\sum_{n\geq 0} u_{\varphi(n)}$ converge **absolument**.

Propriété 4

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ est indépendante de l'indexation φ. On appelle ce réel la *somme de la famille* $(u_i)_{i\in I}$ et on la note simplement $\sum_{i\in I} u_i$.

Remarque. Ce résultat signifie que pour une famille sommable, l'ordre de sommation est sans importance. C'est fondamental pour définir l'espérance d'une variable aléatoire discrète, car la somme ne dépend pas de la « numérotation » qu'on a choisie pour $X(\Omega)$ (une telle numérotation consiste à ordonner de manière arbitraire les éléments de $X(\Omega)$).

Les définitions de cette section sont peu utilisables en pratique (problème du choix de φ qui peut mener à des calculs trop compliqués). Pour montrer qu'une famille indexée par $\mathbb{N}^2$ est sommable, on utilisera l'un des théorèmes de la section suivante (Fubini ou sommation suivant les diagonales).

2.3 Sommation par paquets

2.3.1 Théorème de sommation par paquets

Propriété 5 (Sommation par paquets)

Soit I un ensemble dénombrable, et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexés par I.
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I, c'est-à-dire une famille de sous-ensembles de I telle que :

$$I = \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n \quad \text{et} \quad I_n \cap I_m = \varnothing \text{ si } n \neq m.$$

Alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable (et donc $\sum_{i\in I_n} |u_i|$ existe) ;

(ii) la série $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i\in I_n} |u_i| \right)$ converge.

Et dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right).$$

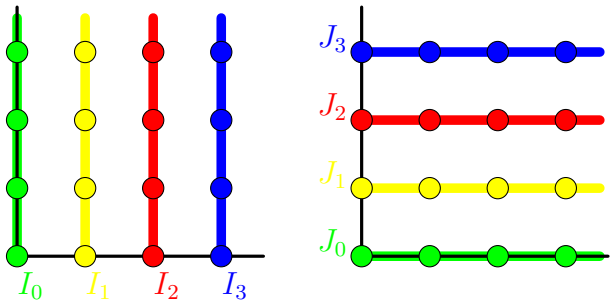
Remarque : Cette définition d'une partition est assez proche de la définition en probabilités d'une partition de l'univers Ω : on a juste remplacé Ω par I et les événements par des sous-ensembles de I. Comme on veut utiliser ces résultats en proba, c'est super.

2.3.2 Théorème de Fubini

Prenons $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et posons pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$I_k = \{(k, j),\ j \in \mathbb{N}\} \text{ et } J_\ell = \{(i, \ell),\ i \in \mathbb{N}\}.$$

Alors I est dénombrable, et $(I_k)_{k\in N}$ et $(J_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ sont des partitions de I.



Par application du théorème de sommation par paquets, on obtient le résultat suivant.

Théorème 6 (*Théorème de Fubini* (1879 - 1943))

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels indexés par $\mathbb{N}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

(2) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{j\geq 0} |u_{i,j}|$ converge et la série $\sum_{i\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}|\right)$ converge.

(3) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{i\geq 0} |u_{i,j}|$ converge et la série $\sum_{j\geq 0} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}|\right)$ converge.

Et dans ce cas :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right).$$

Remarque : Il est essentiel d'avoir toutes ces convergences **en valeur absolue** pour pouvoir appliquer Fubini.

Méthode. Théorème de Fubini.

Pour montrer qu'une famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable à l'aide du théorème de Fubini, on procèdera comme suit :

(i) On choisit l'un des deux indices, disons i pour fixer les choses, comme premier indice de sommation (parce qu'on reconnait pour cet indice une série de référence).

*(ii) À $j \in \mathbb{N}$ **fixé**, on étudie la convergence de $\sum_{i\geq 0} |u_{i,j}|$.*

- *Si elle ne converge pas, la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.*
- *Si elle converge, on calcule sa somme $S_j = \sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}|$ (qui ne doit dépendre que de j), et on passe à l'étape suivante.*

(iii) On étudie alors la convergence de la série $\sum_{j\geq 0} S_j$.

- *Si elle ne converge pas, la famille* $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ *n'est pas sommable.*
- *Si elle converge, alors on peut conclure que la famille* $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ *est sommable.*

Et dans le cas où la famille est sommable, on peut calculer sa somme (essentiellement en reprenant les calculs effectués, mais cette fois sans valeurs absolues) :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right).$$

Exercices. Pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, on définit $u_{i,j} = \dfrac{(-1)^{i+j}i^j}{i!j!}$. Montrer que la famille $(u_{i,j})$ est sommable et calculer sa somme.

Propriété 7

Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Si les séries $\sum_{i\geq 0} u_i$ et $\sum_{j\geq 0} v_j$ convergent absolument alors la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, et on a :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_i v_j = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j\right).$$

Preuve.

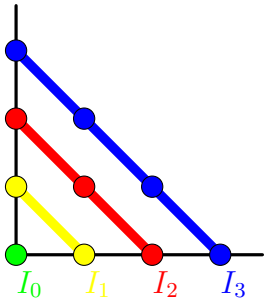
□

2.3.3 Sommation suivant les diagonales

Prenons encore $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \ / \ i+j = n\} = \{(i, n-i) \ / \ i \in [\![0, n]\!]\}$$

C'est un ensemble fini de cardinal $n+1$. Et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I.



En appliquant appliquant le théorème de sommation par paquets avec la partition $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$ suivant les diagonales, on obtient la

Propriété 8 (Sommation suivant les diagonales)

La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i+j=n}|u_{i,j}|\right)$ converge.

Et dans ce cas :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=n} u_{i,j}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} u_{i,n-i}\right).$$

Idée.

On pensera à utiliser la sommation suivant les diagonales quand le terme général $u_{i,j}$ de la famille fait intervenir la quantité $i+j$.

Exercice. Posons $u_{i,j} = \frac{1}{(i+j)!}$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que la famille $(u_{i,j})$ est sommable, et calculer sa somme.

Remarques.

- On admettra que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent aux familles indexées par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- On pourrait de la même façon traiter des familles indexées par $\mathbb{N}^3$, $\mathbb{N}^4$, $\cdots$

3 Moments d'une variable aléatoire discrète

La nouveauté de ce chapitre est l'espérance totale, mais on commence par cohérence par des rappels sur les moments des variables aléatoires discrètes.

Notation. Dans toute la suite, X désigne une variable discrète. Lorsque c'est nécessaire, on fixera une numérotation de son ensemble image $X(\Omega)$ qu'on notera :

- $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ si X est discrète fini,
- $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ si X est discrète infinie. (Il est donc dénombrable!)

3.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète

Définition.

On dit qu'une variable aléatoire discrète X admet une **espérance** si la série $\sum x_k P([X = x_k])$ converge **absolument**[1]. Dans ce cas, on appelle **espérance de** X, notée $E(X)$, la somme de cette série :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP([X = x]).$$

Interprétation. Lorsqu'elle existe, l'espérance $E(X)$ est la moyenne des valeurs x prises par la variable aléatoire X pondérées par les probabilités $P([X = x])$.

Le saviez-vous ?

Après avoir entendu parler de la correspondance de Blaise Pascal (1623 - 1662) et Pierre de Fermat (1607 - 1665) au sujet du *problème des partis* lors d'un voyage à Paris en 1655, le mathématicien hollandais Christiaan Huygens (1629 - 1695) publie le premier livre sur le calcul des probabilités dans les jeux de hasard en 1657. Il y introduit comme notion fondamentale la « valeur de l'espérance » d'une situation d'incertitude. Pour nommer ce nouveau concept, il hésite entre les mots latins *spes* et *expectatio* signifiant respectivement *espoir* et *espérance*. Quelques années plus tard, il définit l'espérance de vie.



Christiaan Huygens (1629 - 1695).

Christiaan Huygens est également célèbre pour sa découverte de Titan, plus grand satellite de Saturne, et pour son invention de l'horloge à pendule qui améliora la précision des horloges existantes, la faisant passer de 15 minutes à 15 secondes par jour.

[1] Rappelons que ceci signifie, par définition, que la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Et dans ce cas, sa somme ne dépend alors pas de l'ordre de sommation.

Propriété 9

Si X est une variable aléatoire réelle presque surement constante égale à $c \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire $P(X = c) = 1$), alors X admet une espérance et $E(X) = c$.

Remarque. Les variables aléatoires discrètes finies ont toujours une espérance. Par contre, il existe des variables aléatoires discrètes infinies qui n'ont pas d'espérance.

Propriété 10 (Linéarité de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes **admettant une espérance**, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance qui vaut :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Corollaire 11

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance. Pour tous réels a et b, la variable aléatoire $aX + b$ admet aussi une espérance, et :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Propriété 12 (Existence d'une espérance par domination)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $|X| \leq Y$ presque sûrement.
Si Y admet une espérance alors X admet aussi une espérance et on a $|E(X)| \leq E(Y)$.

Propriété 13

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une espérance.

- Si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geq 0$ (*positivité de l'espérance*).
- Si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$ (*croissance de l'espérance*).

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique, et soit $Y = \sqrt{X}$. Montrer que Y admet une espérance.

3.2 Théorème de transfert

Théorème 14 (*de transfert pour les variables discrètes*)

Soient X une variable aléatoire discrète et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète. De plus :

- Si X est une variable aléatoire discrète **finie** :

  La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance, et :

  $$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P([X = x]) \quad \text{(somme finie)}.$$

- Si X est une variable aléatoire discrète **infinie** :

  La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance si, et seulement si, la série $\sum g(x_k)P([X = x_k])$ converge **absolument**. Dans ce cas :

  $$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P([X = x]) \quad \text{(série absolument convergente)}.$$

Méthode. Application du théorème de transfert.

Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $Y = g(X)$ à partir de la loi de X, et ceci sans connaitre la loi de Y.

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $Y = e^X$ et $Z = \dfrac{1}{1+X}$. Montrer que Y et Z admettent une espérance et la calculer.

3.3 Moments d'ordre supérieur, variance

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète, et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dit que X **admet un moment d'ordre** r si X^r possède une espérance. Par le théorème de transfert, c'est le cas si, et seulement si, la série $\sum x_k^r P([X = x_k])$ converge **absolument**. On note alors $m_r(X) = E(X^r)$ le **moment d'ordre** r de X :

$$m_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r P([X = x]).$$

Propriété 15

Si X admet un moment d'ordre r, alors il admet un moment à tout ordre $s \leq r$.

Preuve.

□

Remarque. En particulier, si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance.

On dit que X admet une **variance** si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. D'après le théorème de transfert, c'est le cas si, et seulement si, la série $\sum (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$ converge **absolument**. On appelle alors **variance de** X, notée $V(X)$, la somme de cette série :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 P([X = x]).$$

Interprétation. La variance d'une variable aléatoire discrète X mesure la dispersion des valeurs prises par X par rapport à $E(X)$. En particulier, c'est un réel positif ou nul.

Propriété 16 (de la variance)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Pour tout réel a et b, la variable aléatoire $aX+b$ admet aussi une variance, et :

$$V(aX+b) = a^2V(X).$$



Mise en garde.

La variance n'est pas linéaire : $V(aX) = a^2V(X)$!

Remarque. Puisque $(X-E(X))^2 \geq 0$, il suit par positivité de l'espérance (sous réserve d'existence) :

$$V(X) = E((X-E(X))^2) \geq 0.$$

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. On appelle **écart-type de** X, et on note $\sigma(X)$, le réel défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Propriété 17

Soit X une variable aléatoire discrète possédant une variance. Alors :

$$X \text{ est constante presque surement} \quad \Leftrightarrow \quad V(X) = 0.$$

Théorème 18 (*Formule de Koenig (1712 - 1757) - Huygens 1629 - 1695*)



Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance.
X admet une variance si, et seulement si, X admet un moment d'ordre 2, et alors :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Preuve.

□

Méthode. Calcul de la variance.
Dans la quasi-totalité des cas, on utilise la formule de Koenig-Huygens pour calculer une variance et non la définition qui entraîne des calculs en général plus compliqués.

Définition.

Soit X une variable aléatoire discrète.

- X est dite **centrée** si X admet une espérance et si $E(X) = 0$.
- X est dite **centrée réduite** si X admet une variance et $E(X) = 0$, $V(X) = 1$.

Propriété 19

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Alors :

- $X - E(X)$ est centrée ;
- $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. On l'appelle **la variable aléatoire centrée réduite associée à X.**

4 Espérance totale

Rappel. Soit A un évènement de probabilité non nulle. Pour tout évènement $B \in \mathscr{A}$, on définit la *probabilité de B sachant A* par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Alors P_A est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Définition.

Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$, et X une variable aléatoire réelle discrète.

On appelle **loi de X sachant A** la loi de X pour la probabilité P_A, c'est-à-dire la donnée de tous les couples $(x, P_A(X = x))$ pour x dans $X(A)$.

Exercice. Le nombre de clients qui entrent dans un restaurant un soir de semaine est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque client choisit, indépendamment du choix de ses voisins, des légumineuses avec probabilité p et du tofu avec la probabilité $1 - p$. On note Y le nombre de clients qui choisissent des légumineuses.

a) Quelle est la loi de Y sachant $[X = n]$?

Définition.

On dit que X **admet une espérance sachant** A (ou **conditionnellement à** A) si X admet une espérance pour la probabilité P_A, c'est-à-dire si la série $\sum x_k P_A(X = x_k)$ converge absolument. Dans ce cas, on appelle **espérance de X sachant** A, notée $E(X|A)$ la somme de cette série :

$$E(X|A) = \sum_{x \in X(A)} x P_A(X = x).$$

Remarques.

- Très souvent, la loi de X sachant A est usuelle et l'espérance conditionnelle en découle immédiatement.
- On peut choisir indifféremment de sommer sur $X(\Omega)$ ou $X(A)$ pour calculer $E(X|A)$, les probabilités $P_A(X=x)$ pour $x \notin X(A)$ étant nulles.

Exercice. Reprenons l'exemple des clients du restaurant.

b) Déterminer l'espérance de Y sachant $[X=n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 20 (*Formule de l'espérance totale*)

Soit $(A_n)_{n\in I}$ un système complet d'événements tel que $P(A_n) \neq 0$ pour tout $n \in I$.

Une variable discrète X admet une espérance si, et seulement si :

(i) pour tout $n \in I$, $E(X|A_n)$ existe ;

(ii) $\sum P(A_n)E(|X||A_n)$ converge (absolument).

Dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{n\in I} P(A_n)E(X|A_n) = \sum_{n\in I}\sum_{x\in X(\Omega)} xP_{A_n}(X=x)P(A_n).$$

Preuve. On fait la preuve dans le cas où X est finie et $I = [\![1, N]\!]$.

□

Remarques.

- En pratique, la variable X est toujours positive, et donc on remplacera $E(|X||A_i)$ par $E(X|A_i)$.
- Si X est finie, elle admet une espérance et la formule de l'espérance totale s'applique alors sans se soucier des problèmes de convergence.

Exercice. Reprenons l'exemple des clients du restaurant.

c) En déduire que Y admet une espérance que l'on calculera.

Remarque.

- Lorsqu'on utilise la formule de l'espérance totale, on précisera **toujours** au préalable le système complet d'événements qu'on utilise.
- Cette formule est très utile en pratique et évite bien souvent d'avoir à retrouver la loi de Y pour calculer son espérance.

5 Lois discrètes usuelles

5.1 Expériences associées aux différentes lois classiques.

- **Lois issues d'un tirage unique :**
  - **Loi de Bernoulli** $\mathscr{B}(p)$ **:** succès (valeur 1) ou échec (valeur 0) lors d'un tirage déséquilibré.
  - **Loi uniforme** $\mathscr{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$ **:** valeur obtenue lors d'un tirage équiprobable dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N.
- **Lois issues d'une répétition de tirages avec remise :**
  - **Loi binomiale** $\mathscr{B}(n, p)$ **:** nombre de succès lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.
  - **Loi géométrique** $\mathscr{G}(p)$ **:** temps d'attente du premier succès lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

La loi de Poisson ne correspond pas à une situation typique mais à une loi limite (de la loi binomiale). Elle se rencontre lorsqu'on répète un grand nombre de fois et de manière indépendante une expérience aléatoire dont la réalisation est rare. Lorsqu'il faut l'utiliser, l'énoncé l'indique explicitement.

5.2 Simulation en `Python`

Le sous-module `numpy.random` est dédié aux simulations de variables aléatoires.

Définition.

On importe la bibliothèque `numpy.random` en écrivant l'une ou l'autre des instructions suivantes (on privilégiera la deuxième) :

`from numpy.random import *` ou `import numpy.random as rd`

Définition.

- La commande `rd.randint(n)` simule la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
- La commande `rd.randint(a,b)` simule la loi uniforme sur $[\![a, b-1]\!]$ avec $a < b$.
- La commande `rd.binomial(n,p)` simule la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.
- La commande `rd.geometric(p)` simule la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.
- La commande `rd.poisson(lambda)` simule la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Remarques.

- On peut simuler la loi de Bernoulli de paramètre p en écrivant l'instruction `rd.binomial(1,p)`.
- On peut obtenir r simulations d'une loi usuelle sous la forme d'un vecteur ou $r \times s$ simulations sous la forme d'une matrice de $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ en ajoutant à ces commandes l'argument `r` ou `[r,s]` respectivement. Par exemple :
  - `rd.geometric(p,r)` renvoie un vecteur contenant r simulations de la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$;
  - `rd.poisson(lambda,[r,s])` renvoie $r \times s$ simulations de la loi de Poisson de paramètre λ.

5.3 Table des lois discrètes usuelles

Lois discrètes usuelles

	Nom	Notation	Support $X(\Omega)$	Valeur de $P(X=k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$	Espérance	Variance
Lois finies	Loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathscr{U}(\{1,\dots,n\})$	$\{1,\dots,n\}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
	Loi uniforme sur $\{a,a+1,\dots,b\}$ $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leq b$	$\mathscr{U}(\{a,\dots,b\})$	$\{a,\dots,b\}$	$\dfrac{1}{b-a+1}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$
	Loi de Bernoulli de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$
	Loi binômiale de paramètres n et p $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$	$\mathscr{B}(n,p)$	$\{0,1,\dots,n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Lois infinies	Loi géométrique de paramètre p $p \in]0,1[$	$\mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
	Loi de Poisson de paramètre λ $\lambda \in]0,+\infty[$	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ