Chapitre 3

# Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation


**1 Valeurs propres, vecteurs propres 2**
- 1.1 Vecteurs propres et espaces propres d'un endomorphisme . . . 3
- 1.2 Vecteurs propres et espaces propres d'une matrice carrée . . . 5

**2 Recherche d'éléments propres 7**
- 2.1 Cas des matrices $2 \times 2$ . . . 7
- 2.2 Cas des matrices triangulaires . . . 8
- 2.3 Utilisation d'un polynôme annulateur . . . 9
- 2.4 Recherche des valeurs propres « à vue » . . . 10
- 2.5 Cas général . . . 11

**3 Propriétés générales 14**
- 3.1 Sous-espaces propres stables . . . 14
- 3.2 Somme directe de sous-espaces propres . . . 14
- 3.3 Conséquences . . . 15

**4 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées 18**
- 4.1 Définition . . . 18
- 4.2 Critères de diagonalisabilité . . . 19
- 4.3 Pratique de la diagonalisation . . . 22

**5 Applications de la diagonalisation 24**
- 5.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable . . . 24
- 5.2 Suites récurrentes linéaires . . . 24
- 5.3 Matrices diagonalisables semblables . . . 25
- 5.4 Polynôme annulateur et calcul de l'inverse . . . 26



Mickaël Postic - Inspiré de Mathieu Mansuy et Coralie Renault

Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)

Page personnelle : `mickael.postic.eu/`

E-mail : `mickael.postic@ac-besancon.fr`

# 1 Valeurs propres, vecteurs propres

Dans tout ce chapitre :

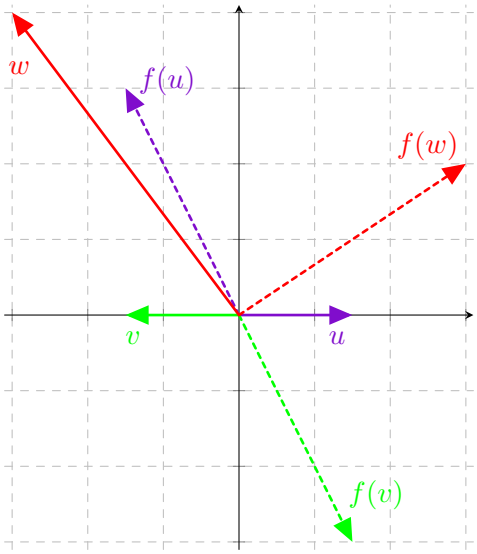
- $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ généralement de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ ;
- $f$ est un endomorphisme de $E$ ;
- $A$ est une matrice carrée de taille $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients réels.

**Motivation.**

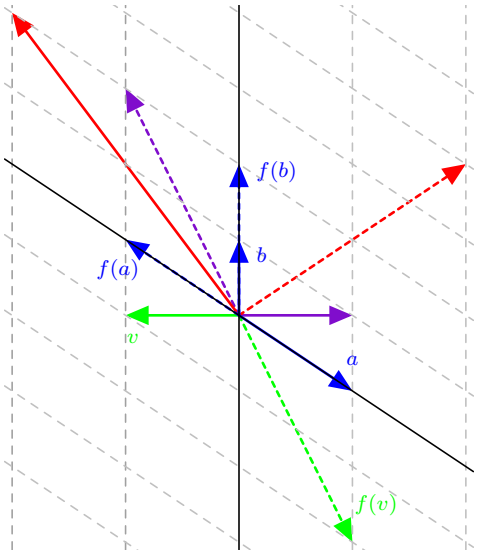
On souhaite mieux comprendre la façon dont un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ agit sur les vecteurs de $E$. Pour un certain nombre d'endomorphismes, c'est particulièrement simple : par exemple, pour les multiples de l'identité (endomorphisme nul et homothéties), tous les vecteurs subissent le même traitement, à savoir être multipliés par le même scalaire. Mais ce problème s'avère plus complexe pour un endomorphisme quelconque. Prenons l'exemple de l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (2x, -2x - y).$$

Représentons sur la figure ci-dessous trois vecteurs $u, v, w$ ainsi que leurs images par $f$.




Il semble a priori bien difficile de comprendre « géométriquement » quelle est la transformation qui se cache derrière $f$. Pour mieux y parvenir, effectuons un changement de bases, en posant $a = (3/2, -1)$ et $b = (0, 1)$. Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une famille libre, et donc une base de $\mathbb{R}^2$, dans laquelle on peut à nouveau représenter nos vecteurs et leurs images par $f$.



Dans cette base, tout semble plus clair : on a $f(a) = -a$ et $f(b) = 2b$. Et pour $v$ par exemple, il se décompose sous la forme $v = -a - b$, et donc :

$$f(v) = -f(a) - f(b) = a - 2b.$$

Plus généralement, tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$, après décomposition $u = \lambda a + \mu b$ dans la base $(a, b)$, est transformé par $f$ en :

$$f(u) = \lambda f(a) + \mu f(b) = -\lambda a + 2\mu b.$$

Ainsi dans la base $(a, b)$, on comprend bien la transformation réalisée par $f$ : calculer l'image d'un vecteur par $f$, c'est multiplier par $-1$ sa composante suivant $a$ et par 2 sa composante suivant $b$.

Le but de ce chapitre est de pouvoir trouver de tels vecteurs $a$ et $b$, appelés *valeurs propres* de $f$.

D'un point de vue matriciel, on souhaite trouver une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est « la plus simple possible » pour faciliter les calculs. Nous verrons sous quelles conditions on peut obtenir une matrice diagonale et comment l'obtenir. D'un point de vue matriciel, cela correspond à étudier les conditions sur $A$ pour obtenir une matrice diagonale semblable à $A$, et déterminer la matrice de passage correspondante.

Partons de notre objectif en supposant que la matrice de $f$ dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $E$ est diagonale :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \\ e_n \end{array}.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i)$ est égal à $\lambda_i \cdot e_i$ avec $e_i \neq 0_E$ (car c'est un vecteur d'une famille libre). Ceci conduit là encore naturellement à la notion d'*éléments propres* que l'on développe dans ce chapitre.

## 1.1 Vecteurs propres et espaces propres d'un endomorphisme

**Définition.**

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que $\lambda$ est une **valeur propre de** $f$ lorsque :

$$\exists x \in E \setminus \{0_E\}, \quad f(x) = \lambda \cdot x.$$

- On dit alors qu'un vecteur **non nul** $x \in E$ est un **vecteur propre de** $f$ **associé à la valeur propre** $\lambda$ si :

$$f(x) = \lambda \cdot x.$$

- On appelle **spectre de** $f$, et on note $\mathrm{Sp}(f)$, l'ensemble des valeurs propres de $f$.

**Exercice.** $E = \mathbb{R}^3$, $f$ l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, -2x - 2y + 5z).$$

Montrer que $u = (1, 0, 1)$ est un vecteur propre de $f$ et déterminer la valeur propre $\lambda$ associée.



**Mise en garde.**

Le vecteur nul n'est donc pas un vecteur propre! Si l'on vous dit vecteur propre, vous devez penser "donc non nul".

**Remarque.** Pour tout $x \in E$ :

$$f(x) = \lambda \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E).$$

**Définition.**



Si $\lambda$ est une valeur propre de $f$, on appelle **sous-espace propre de $f$ associé à la valeur propre** $\lambda$, et on note $E_\lambda(f)$, le sous-espace vectoriel de $E$ défini par :

$$E_\lambda(f) = \{x \in E \,/\, f(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E).$$

$E_\lambda(f)$ est ainsi constitué de tous les vecteurs propres associés à $\lambda$ **et** du vecteur nul $0_E$.

**Exercice.** Déterminer $E_\lambda(f)$ dans l'exercice précédent.

**Remarque.** Supposons $E$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on dispose des équivalences :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\Leftrightarrow \exists x \neq 0_E, \quad f(x) = \lambda \cdot x \\
&\Leftrightarrow \exists x \neq 0_E, \quad x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\} \\
&\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)) \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)) < n \text{ par le th. du rang} \\
&\Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E) \text{ n'est pas bijective.}
\end{aligned}$$

On en déduit le théorème suivant.

**Théorème 1** (Caractérisation des valeurs propres pour un endomorphisme)

On dispose des équivalences suivantes :



$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)) \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) < n \\
&\Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{Id}_E) \text{ n'est pas bijective.}
\end{aligned}$$

De plus, $\dim(E_\lambda(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

**Exercice.** On considère toujours l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, -2x - 2y + 5z).$$

Montrer que 1 est valeur propre de $f$ et déterminer le sous-espace propre associé.

**Propriété 2** (Cas particulier : la valeur propre 0)

On a l'équivalence :

$$0 \in \mathrm{Sp}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ n'est pas bijective.}$$

De plus, $\dim(E_0(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = \dim(\ker(f))$.

## 1.2 Vecteurs propres et espaces propres d'une matrice carrée

On définit les éléments propres d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme étant ceux de l'endomorphisme canoniquement associé $\varphi_A : \begin{cases} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto AX \end{cases}$.

**Définition.**

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que $\lambda$ est une **valeur propre de** $A$ lorsque :
$$\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, \quad AX = \lambda X.$$
- On dit qu'un vecteur colonne **non nul** $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un **vecteur propre de** $A$ **associé à la valeur propre** $\lambda$ si :
$$AX = \lambda X.$$
- On appelle **spectre de** $A$, et on note $\mathrm{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de $A$.

**Remarque.** En `Python`, la commande `al.eig(A)` de la bibliothèque `numpy.linalg` permet d'obtenir le spectre d'une matrice `A`. Le nom anglais des valeurs propres est eigenvalues.

**Définition.**

Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$. On appelle **sous-espace propre de** $A$ **associé à la valeur propre** $\lambda$, et on note $E_\lambda(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = \lambda X\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n).$$

$E_\lambda(A)$ est ainsi constitué de tous les vecteurs propres associés à $\lambda$ **et** du vecteur nul $0_{n,1}$.

**Propriété 3** (Liens endomorphismes/matrices)

Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$, et $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \quad \Leftrightarrow \quad X = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(x) \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n).$$

En particulier, $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$ et $\dim(E_\lambda(f)) = \dim(E_\lambda(A))$ pour toute valeur propre $\lambda$.

**Preuve.** Il suffit de noter que la matrice de $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ est $A - \lambda I_n$. Ainsi l'équivalence souhaitée est bien satisfaite. En particulier :

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}.$$

Donc $\mathrm{Sp}(f)$ est bien égal à $\mathrm{Sp}(A)$. □

**Propriété 4**

Deux matrices semblables $A$ et $A'$ ont les mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.

**Preuve.**

□

**Mise en garde.**

Il n'y a pas de réciproque : deux matrices ayant mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension ne sont pas forcément semblables.

Tous les énoncés concernant les endomorphismes sont vrais en particulier pour l'endomorphisme $\varphi_A$. Ils peuvent donc être reformulés pour une matrice $A$.

**Théorème 5** (Caractérisation des valeurs propres pour une matrice)

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible} \end{aligned}$$

De plus, $\dim(E_\lambda(A)) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$.

**Propriété 6** (Cas particulier : la valeur propre 0)



On a les équivalences :

$$0 \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) < n \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ n'est pas inversible.}$$

De plus, $\dim(E_0(A)) = n - \mathrm{rg}(A)$.

**Propriété 7**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A$ et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres, et $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda({}^tA))$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

**Preuve.**

□



**Mise en garde.**

En revanche, les sous-espaces propres de $A$ et ${}^tA$ n'ont aucune raison d'être égaux : un vecteur $X$ vérifiant $AX = \lambda X$ ne satisfera pas nécessairement ${}^tAX = \lambda X$.

# 2 Recherche d'éléments propres

**Vocabulaire.** Déterminer les **éléments propres** d'un endomorphisme ou d'une matrice, c'est déterminer :

- toutes ses valeurs propres ;
- le sous-espace propre associé à chacune des valeurs propres (souvent en donnant une base de ce sous-espace vectoriel).

## 2.1 Cas des matrices $2 \times 2$

**Propriété 8** (Cas des matrices $2 \times 2$)



Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ est racine de } x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A).$$

**Preuve.**

□

**Exercice.** Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

## 2.2 Cas des matrices triangulaires

**Propriété 9**

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux.

**Preuve.**

□

**Exemple.** Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont $-2, 0, 5$.

**Propriété 10**

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$. Alors, le spectre de $p$ est $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$.

**Preuve.**

□

## 2.3 Utilisation d'un polynôme annulateur

**Propriété 11**

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, et $u \in E_\lambda(f)$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ :

$$P(f)(u) = P(\lambda) \cdot u.$$

**Preuve.**

□

**Propriété 12**

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme annulateur de $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$). Alors les valeurs propres de $f$ (resp. $A$) sont **parmi** les racines de $P$.

**Preuve.**

□

**Mise en garde.**

Attention, il n'y a **pas de réciproque** : une racine de $P$ n'est pas forcément valeur propre de $f$. Par exemple $x(x-1)$ est un polynôme annulateur de $\mathrm{Id}_E$. Donc les valeurs propres **possibles** pour $\mathrm{Id}_E$ sont 0 et 1. Réciproquement, seul 1 est valeur propre de $\mathrm{Id}_E$.

**Exemple.** Supposons $E$ de dimension finie $n$, et soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$, sur $F$ parallèlement à $G$. Puisque $p \circ p = p$, $x^2 - x$ est un polynôme annulateur de $p$. Donc les valeurs propres **possibles** de $p$ sont 0 et 1.

Vérifions que ce sont bien des valeurs propres de $p$ :

- $E_0(p) = \mathrm{Ker}(p) = G$, et $\dim(E_0(p)) = n - \mathrm{rg}(p) = n - r > 0$ par le théorème du rang. Donc 0 est bien valeur propre de $p$.
- $E_1(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = F = \mathrm{Im}(p)$. Or $\dim(\mathrm{Im}(p)) = r > 0$. Donc 1 est bien valeur propre de $p$.

**Exercice.** Déterminer les valeurs propres de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice.** Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme $f$ nilpotent d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire tel que $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$).

## 2.4 Recherche des valeurs propres « à vue »

**Méthode. Recherche des valeurs propres « à vue ».**
*On pourra tenter de trouver directement, lorsque cela est facile :*

- *un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I_n$ est de rang $< n$ ;*
- *une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle qui satisfait $AX = \lambda X$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.*
  *On pourra tester notamment $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ qui conviendra lorsque la somme des coefficients de chaque ligne de $A$ est identique.*

*Si l'un de ces points est satisfait, $\lambda$ est valeur propre de $A$.*

**Exercice.** Donner deux valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

## 2.5 Cas général

**Méthode. Recherche des valeurs propres par l'algorithme du pivot de Gauss.**

*En dernier recours, et* ***seulement si toutes les méthodes précédentes n'aboutissent pas*** *(ce qui n'est pratiquement jamais le cas dans un sujet de concours), on procèdera comme suit pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme $f$ ou d'une matrice $A$ :*

*(i) on écrit la matrice $A$ de $f$ dans une base donnée ;*

*(ii) on résout $AX = \lambda X$ où $\lambda$ est une indéterminée en échelonnant le système;*

*(iii) on échelonne la matrice $A - \lambda I_n$ en suivant l'algorithme de Gauss* ***sur les lignes****. On respectera pour cela les consignes suivantes :*

- *autant que possible, on échangera deux lignes afin de ne plus avoir $\lambda$ sur la diagonale, sauf sur le dernier coefficient en bas à droite ;*
- *si ce n'est pas possible, on sera amené à prendre pour pivot une expression dépendante de $\lambda$. Dans ce cas, on poursuit l'algorithme en supposant ce pivot non nul pour ne pas diviser par $0$. On indiquera alors à cette étape les valeurs « interdites » pour $\lambda$ ;*

*(iv) $\lambda$ est valeur propre de $A$ si, et seulement si, $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$, soit si, et seulement si, l'un des pivots est nul (argument à redonner à chaque fois). On est donc ramené à la résolution d'équations polynomiales.*

*(v) on termine en étudiant chaque valeur « interdite » : on reprend les calculs et on regarde si $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$ pour chaque valeur de $\lambda$ exclue précédemment.*

**Exercice.** Déterminer le spectre des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



**Méthode. Détermination des sous-espaces propres.**

*On suppose avoir déterminé les valeurs propres de $A$ par l'algorithme de Gauss. Pour déterminer $E_\lambda(A)$ :*

- *si on veut seulement sa dimension :* $\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$ *;*
- *pour déterminer explicitement $E_\lambda(A)$, on résout le système linéaire $(A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}$ qui a déjà été échelonné lors du calcul des valeurs propres. $E_\lambda(A)$ est l'ensemble des solutions de ce système.*

**Exercice.** Calculer la dimension et les sous-espaces propres des matrices précédentes.

# 3 Propriétés générales

## 3.1 Sous-espaces propres stables

**Propriété 13**

- Soient $f$ et $g$ des endomorphismes de $E$ qui commutent. Alors tout sous-espace propre de $f$ est stable par $g$.
- Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $E_\lambda(f)$ est stable par $f$. L'endomorphisme induit par $f$ sur $E_\lambda(f)$ est l'homothétie de rapport $\lambda$ (i.e. la "multiplication par $\lambda$").

**Preuve.**

□

**Remarque.** Comme on l'a expliqué dans l'introduction, il est difficile de comprendre « géométriquement » la façon dont $f \in \mathscr{L}(E)$ agit sur $E$ tout entier. La propriété précédente nous dit que sur chacun des sous-espaces propres $E_\lambda(f)$, cette application linéaire agit très simplement : elle transforme $x \in E_\lambda(f)$ en $\lambda \cdot x$.

## 3.2 Somme directe de sous-espaces propres

**Propriété 14**

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ des scalaires deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}.$$

La famille $(L_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est appelée **famille des polynômes de Lagrange** associée à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

**Preuve.**

□

**Propriété 15**



Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ des valeurs propres deux à deux distinctes de $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors la somme $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$ est directe.

**Preuve.**

□

## 3.3 Conséquences

**Propriété 16**



Une famille de vecteurs propres de $f$ associée à des valeurs propres distinctes est libre.

**Preuve.**

□

**Propriété 17**

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors $f$ possède au plus $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A$ possède au plus $n$ valeurs propres distinctes.

**Preuve.**

□

**Remarque.** Il se peut bien évidemment que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède strictement moins de $n$ valeurs propres. Par exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ possède une seule valeur propre 1.
- $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne possède aucune valeur propre réelle. En effet :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \mathrm{Tr}(B)\lambda + \det(B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0.$$

Cette équation n'ayant pas de solution réelle, il n'y a pas de valeur propre réelle.

**Propriété 18**

L'inégalité suivante est satisfaite :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq n = \dim(E).$$

**Preuve.**

□

**Remarque.** Il n'y a pas égalité en général. On a vu par exemple que pour $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$ et $\dim(E_1(A)) = \dim(E_2(A)) = 1$, et donc :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 2 < 3.$$

**Exercice.** Déterminer toutes les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**Propriété 19** (Condition suffisante de diagonalisabilité)

- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ possède $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes, alors les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

  De plus, il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.

- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède $n$ valeurs propres distinctes, alors tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

  De plus, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

**Preuve.**

□

**Exercice.** Que peut-on dire de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ?

On peut se demander, dans le même esprit, s'il existe des conditions sur $f$ d'existence d'une base $\mathscr{B}$ de $E$ dans laquelle $M_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale, et préciser comment l'obtenir. D'un point de vue matriciel, cela correspond à étudier les conditions sur $A$ pour qu'elle soit semblable à une matrice diagonale, et déterminer la matrice de passage correspondante.

# 4 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

## 4.1 Définition

**Définition.**

- On dit que $f$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ telle que $M_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale.
- On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

**Exercice.** Montrer que si $p$ est un projecteur, alors $p$ est diagonalisable.

**Propriété 20**

$f$ est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.
Dans ce cas, $M_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice diagonale telle que :

- les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $f$ ;
- $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ apparait $\dim(E_\lambda(f))$ fois sur la diagonale.

**Preuve.**

□

**Propriété 21**

Soit $\mathscr{B}$ une base de $E$ et $A = M_{\mathscr{B}}(f)$. Alors :

$$f \text{ diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ diagonalisable.}$$

**Preuve.**

□

## 4.2 Critères de diagonalisabilité

**Rappels.** On a établi dans la partie précédente que :

- la somme $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ est directe ;
- $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq n$.

**Théorème 22** (CNS de diagonalisabilité de $f \in \mathscr{L}(E)$)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $f$ est diagonalisable ;

(2) Il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$ ;

(3) $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = n$ ;

(4) $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$.

**Preuve.**

□

En appliquant le résultat précédent à l'endomorphisme $\varphi_A : X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to AX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à $A$, on obtient le :

**Théorème 23** (CNS de diagonalisabilité de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $A$ est diagonalisable ;

(2) Il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A$ ;

(3) $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$ ;

(4) $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A)$.

**Exercice.** Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables, et donner (si c'est le cas) une matrice diagonale semblable à ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons qu'on avait obtenu

- $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$, $\dim(E_1(A)) = 1$, $\dim(E_2(A)) = 1$.

- $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1, 3\}$, $\dim(E_{-1}(B)) = 1 = \dim(E_1(B)) = \dim(E_3(B))$.

- $\mathrm{Sp}(C) = \{1, 2\}$, $\dim(E_1(C)) = 2$, $\dim(E_2(C)) = 1$.

On rappelle qu'en fin de partie précédente on a vu :

**Propriété 24** (Condition suffisante de diagonalisabilité)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).
Si $f$ (resp. $A$) admet $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes, alors $f$ (resp. $A$) est diagonalisable. De plus, ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

**Remarque.** Il n'y a pas de réciproque : la matrice $C$ par exemple admet 2 valeurs propres distinctes et est bien diagonalisable.

On étudie à présent le cas opposé d'un endomorphisme ou d'une matrice possédant une seule valeur propre.

**Propriété 25**

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) admettant une unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad f = \lambda \mathrm{Id}_E.$$

$$A \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad A = \lambda I_n.$$

**Preuve.**

□

**Exercice.** La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

**Mise en garde.**

Comme le montre l'exemple précédent, une matrice triangulaire supérieure n'est pas forcément diagonalisable !

**Propriété 26** (Trace d'une matrice diagonalisable)

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de $A$, et notons $m_i = \dim(E_{\lambda_i}(A))$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Si $A$ est diagonalisable, alors :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i.$$

**Preuve.**

□

On termine ce paragraphe par une propriété qui sera démontrée plus tard dans l'année.

**Propriété 27**

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

**Exercice.** Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et déterminer une matrice $D$ diagonale semblable à $A$.

## 4.3 Pratique de la diagonalisation

**Méthode. Comment montrer qu'une matrice est diagonalisable ?**

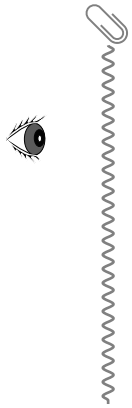
*Pour montrer qu'une matrice $A$ est diagonalisable, on procèdera de la façon suivante :*

- *On détermine les valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de $A$ (en utilisant selon les cas le fait que la matrice soit $2 \times 2$, triangulaire, un polynôme annulateur si on en a un, la trace, ou à l'aide d'un pivot de Gauss) ;*
- *On détermine la dimension de chaque sous-espace propre (en notant que $\dim(E_\lambda(A)) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$).*
- *La somme est-elle égale à $n$ ? Si oui, $A$ est diagonalisable. Elle ne l'est pas sinon.*

*Si $A$ est diagonalisable, alors $A$ est semblable à une matrice diagonale $D$ avec sur sa diagonale les valeurs propres $\lambda$ de $A$ apparaissant $\dim(E_\lambda(A))$ fois.*

**Exercice.** Montrer que $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ -3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et donner une matrice $D$ diagonale semblable à $A$.

**Remarque.** La méthode proposée ne fournit pas la matrice $P$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$. Si on souhaite obtenir cette matrice, on procèdera comme suit :



**Méthode. Détermination de la matrice de passage de diagonalisation.**

*Pour déterminer la matrice $P$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ :*

- *On détermine une base $\mathscr{B}_i$ de chacun des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$ pour $i \in [\![1, p]\!]$.*
  *Comme $A$ est diagonalisable, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(A)$ et la concaténation de chacune de ces bases $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathscr{B}_i$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*
- *$P$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$.*

**Exercice.** Déterminer une matrice $P$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$.

# 5 Applications de la diagonalisation

Les applications de la diagonalisation sont nombreuses. On en donne ici plusieurs exemples en algèbre. Plus tard dans l'année, nous verrons que la diagonalisation permet également d'étudier des phénomènes probabilistes (chaînes de Markov), mais aussi la nature des points critiques d'une fonction de plusieurs variables.

Aucun de ces exemples n'est à savoir refaire sans indication, mais tous ces thèmes sont susceptibles d'être abordés dans des sujets de concours.

## 5.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

**Exercice.** Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ -3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## 5.2 Suites récurrentes linéaires

En première année, vous avez appris à déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, c'est-à-dire vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Ce résultat peut se montrer à l'aide de la diagonalisation.

La même méthode, toujours basée sur la diagonalisation, permet (au moins dans certains cas) de généraliser ce résultat à des suites vérifiant des relations de récurrence plus complexes.

**Exercice.** On considère une suite $(u_n)$ satisfaisant $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $A$ est diagonalisable et la diagonaliser.

   *On ne cherchera pas à déterminer la matrice de passage $P$.*
3. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## 5.3 Matrices diagonalisables semblables

Montrer que deux matrices sont semblables ou non est un problème difficile[1]. On rappelle que si deux matrices sont semblables, alors elles ont :

- même rang,
- mêmes polynômes annulateurs.
- même trace,
- mêmes valeurs propres,
- la dimension des sous-espaces propres correspondants est égale.

Mais la réciproque est fausse en général. On montre ici que c'est cependant vrai dans le cas

[1]Résolu par le mathématicien français Camille Jordan (1838-1922).

diagonalisable.

**Propriété 28**

Soient $A$ et $B$ deux matrices **diagonalisables**. Alors $A$ est semblable à $B$ si, et seulement si, $A$ et $B$ ont les mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.

**Preuve.**

□

**Exercice.** Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

## 5.4 Polynôme annulateur et calcul de l'inverse

**Propriété 29**

Soit $A$ une matrice **diagonalisable**. Alors le polynôme

$$P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (x - \lambda)$$

est annulateur de $A$.

**Preuve.**

□

**Exercice.** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Déterminer un polynôme annulateur de $A$, et en déduire $A^{-1}$.