Chapitre 4

Variables à densité et lois usuelles

1 Généralités sur les variables aléatoires à densité **2**
- 1.1 Définition 2
- 1.2 Densité de probabilité 3
- 1.3 Variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire à densité 6

2 Moments d'une variable aléatoire à densité **8**
- 2.1 Espérance 8
- 2.2 Théorème de transfert 10
- 2.3 Moments d'ordre supérieur, variance 12

3 Lois usuelles **14**
- 3.1 Loi uniforme 14
- 3.2 Loi exponentielle 15
- 3.3 Loi normale 18
- 3.4 Loi gamma 22

4 Simulation en `Python` **26**

5 Tableau récapitulatif **26**

Mickaël Postic - Inspiré de Mathieu Mansuy et Coralie Renault
Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
Page personnelle : `mickael.postic.eu/`
E-mail : `mickael.postic@ac-besancon.fr`

1 Généralités sur les variables aléatoires à densité

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.

1.1 Définition

Rappels.

- On appelle **fonction de répartition** d'une variable aléatoire réelle X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leq x).$$
- Une application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si, et seulement si, elle satisfait les points suivants :

  (i) F est croissante sur $\mathbb{R}$;

  (ii) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$;

  (iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

  De plus, on dispose de l'égalité :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - \lim_{t\to x^-} F(t).$$

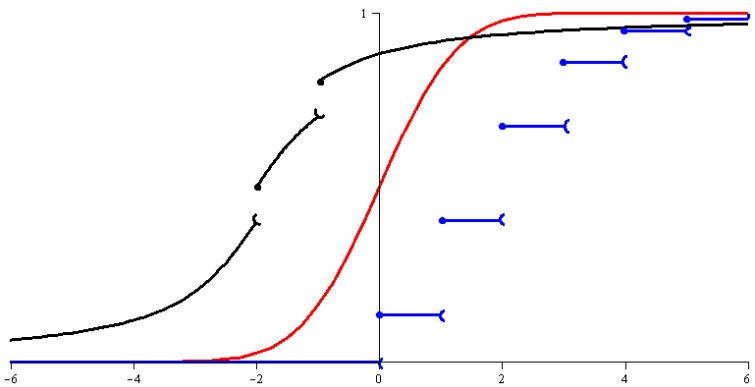
Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que X est une **variable aléatoire à densité** (ou **variable aléatoire continue**) si sa fonction de répartition F_X est de plus :

(iv) continue sur $\mathbb{R}$;

(v) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre **fini** de points.

Remarque. Les trois courbes suivantes sont celles de fonctions de répartition de variables aléatoires réelles.



- La courbe bleue est en escalier. C'est donc la fonction de répartition d'une variable discrète X. Rappelons qu'elle est discontinue à droite en tout point de son ensemble image $X(\Omega)$. En particulier, une variable discrète n'est donc pas à densité.
- La courbe rouge représente une fonction de répartition (celle de la loi normale $\mathscr{N}(0,1)$) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. C'est donc la fonction de répartition d'une variable continue.

- La fonction représentée par la courbe noire est discontinue en certains points, et n'est pas en escalier. C'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui n'est ni discrète, ni continue. Cette année, nous n'étudierons pas ce type de variables aléatoires. On se focalisera sur les cas discret et continu.

Exercice. Soient $\lambda > 0$ et la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de fonction de répartition F.

   On dit qu'une telle variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre λ, ce qu'on note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

2. Montrer que X est une variable aléatoire continue.

1.2 Densité de probabilité

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité.

On appelle **densité de probabilité de** X toute fonction f satisfaisant les deux points suivants:

(i) f est positive sur $\mathbb{R}$;

(ii) $f(x) = F'_X(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Mise en garde.

Une densité d'une variable aléatoire n'est pas unique : si f est une densité de X et si l'on change la valeur de f en un nombre fini de points (en prenant pour nouvelles valeurs des réels positifs), alors on obtient une autre densité de f. Ainsi, on parlera pour f d'**une** densité de X et non de **la** densité de X.

Exercice. Soient $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Déterminer une densité de X.



Pour aller plus loin.

Soit X une variable à densité, f une densité de X. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ en lequel $f(x) = F_X'(x) \neq 0$ et pour tout $h > 0$ « petit » :

$$P(x < X \leq x + h) = F_X(x + h) - F_X(x) \approx f(x) \cdot h.$$

La quantité $f(x) \cdot h$ correspond donc approximativement à la probabilité que X soit proche de x par valeurs supérieures à la précision h. Ainsi, plus la densité prend une valeur élevée au point x, plus la probabilité d'obtenir une valeur proche de x est importante.

Propriété 1 (Lien fonction de répartition/densité)

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. La donnée d'une densité d'une variable aléatoire caractérise donc sa loi. En particulier si X et Y sont à densité de densités respectives f_X et f_Y, elles ont même loi si, et seulement si, $f_X = f_Y$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Propriété 2 (Lien probabilités/densité)

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:



- $P(X = a) = 0$.
- $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \displaystyle\int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t.$

Preuve. F_X étant continue sur $\mathbb{R}$, on obtient pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$P(X = a) = F_X(a) - \lim_{x \to a^-} F_X(x) = 0.$$

Il suit que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(a < X \leq b) = P(a < X \leq b)$. On démontre de même les autres égalités. Notons enfin que :

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

□



Mise en garde.

Ainsi si X est continue, $P(X = a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Ceci est bien évidemment **faux** lorsque X est une variable aléatoire **discrète**.

Propriété 3

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. f est une densité d'une variable aléatoire si, et seulement si, elle satisfait les points suivants :



(i) f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre **fini** de points ;

(ii) f est positive sur $\mathbb{R}$;

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{dt}$ converge et vaut 1.

Exercice. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \dfrac{\lambda}{1+t^2}$.

1. Déterminer la valeur de λ pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X.

   On dit que X suit une loi de Cauchy.

2. Déterminer sa fonction de répartition F_X.

3. Tracer les courbes représentatives de f et F_X et représenter graphiquement les probabilités $P(-1 \leq X \leq 1)$ et $P(X \geq 1)$. Calculer ces probabilités. Que vaut $P(X \leq -1)$?

Notation.

Soit X une variable à densité, et f_X une densité de X. Pour $I = \{t \in \mathbb{R},\ f_X(t) > 0\}$:

$$P(X \in I) = \int_I f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

On notera dans la suite $X(\Omega) = \{t \in \mathbb{R},\ f_X(t) > 0\}$, qu'on appellera l'**ensemble image** de la variable X. Cet ensemble ainsi défini, dépend de la densité f_X choisie pour X.

Remarque. En notant $m = \inf(X(\Omega))$ et $M = \sup(X(\Omega))$ (dans le cas où l'ensemble $X(\Omega)$ est minoré et majoré), on a :

$$\forall x \leq m, \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0,$$

$$\forall x \geq M, \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

1.3 Variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire à densité

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et soit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $g(X)$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Exemple. Si X est une variable aléatoire réelle, alors X^2, e^X, $aX + b$, ... sont des variables aléatoires réelles.

Question. Si X est à densité, est-ce que $g(X)$ est encore à densité ? La réponse est non en général, et il nous faudra étudier chaque cas pour pouvoir conclure. Pour cela, nous procéderons comme suit.

Méthode. Comment montrer que $Y = g(X)$ est à densité et en donner une densité ?

Nous procéderons en quatre étapes :

Étape 1 : Recherche de $Y(\Omega)$.

On fixe une densité de X et on précise $X(\Omega)$. On détermine alors $Y(\Omega)$, image de $X(\Omega)$ par g, afin de trouver sans calcul sur quels intervalles F_Y vaut 0 ou 1.

Étape 2 : Détermination de F_Y.

On revient à la définition $F_Y(x) = P(Y \leq x)$, puis on résout cette inéquation (en prenant bien garde au sens des inégalités) pour l'exprimer à l'aide de F_X.

Étape 3 : Y est-elle continue ?

Une fois F_Y exprimée à l'aide de F_X, on étudie sa continuité sur $\mathbb{R}$ et son caractère $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points. On conclut ainsi que Y est (ou non) à densité.

Étape 4 : Détermination d'une densité de Y.

On dérive F_Y aux points où c'est possible pour obtenir une densité de Y. On prendra des valeurs arbitraires (positives) aux points où F_Y n'est pas dérivable.



Propriété 5 (Transformation affine d'une variable à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, la variable $Y = aX + b$ est à densité, et une densité de Y est donnée par :

$$t \mapsto \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Preuve.

□

Exercice. Supposons que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$. Déterminer une densité de probabilité de $Y = -2X + 3$.

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy.

1. Montrer que $Z = e^X$ est une variable à densité, puis en déterminer une densité.
2. Méme question pour $T = X^2$.

2 Moments d'une variable aléatoire à densité

2.1 Espérance

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, f_X une densité de X.
On dit que X **admet une espérance** lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.
Dans ce cas, on appelle **espérance de** X, et on note $E(X)$, le réel défini par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice. Déterminer l'espérance de X, si elle existe, dans les cas suivants :

1. X suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$;
2. X suit une loi de Cauchy.

Les propriétés vues sur les intégrales donnent les propriétés suivantes sur l'espérance d'une variable aléatoire à densité :

Propriété 6 (Linéarité de l'espérance)

Soient X et Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance, et :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y).$$

Propriété 7 (Existence de l'espérance par domination)

Soient X, Y deux variables aléatoires à densité telles que $0 \leq |X| \leq Y$ presque sûrement.
Si Y admet une espérance, alors X admet aussi une espérance, et $|E(X)| \leq E(Y)$.

Propriété 8 (Variables bornées et espérance)

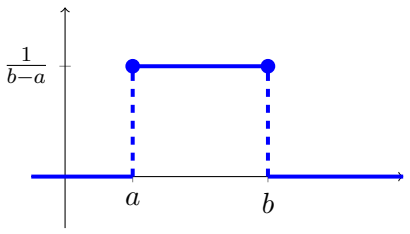
Soit X une variable aléatoire à densité.
Si X est bornée, c'est-à-dire si $X(\Omega)$ est borné[a], alors X admet une espérance.

[a] Bien que $X(\Omega)$ dépende de la densité de X choisie, son caractère borné est lui indépendant de ce choix puisque deux densités de X diffèrent au plus sur un nombre fini de points.

Exemple. Une variable X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $X(\Omega) = [a, b]$, X est bornée et admet donc une espérance.



Densité de la loi uniforme sur $[a, b]$.

Propriété 9

Soient X, Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance.

- *Positivité de l'espérance :* si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geq 0$.
- *Croissance de l'espérance :* si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$.

2.2 Théorème de transfert

Théorème 10 (*de transfert*)

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X nulle en dehors de $]a,b[$ $(a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$, et soit $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.

$E(\varphi(X))$ existe si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^b \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge **absolument**. Et en cas de convergence absolue :

$$E(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve.

□

Corollaire 11

Si X est une variable aléatoire à densité admettant une espérance, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la variable $aX + b$ admet une espérance, et :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Preuve.

□

Exercice. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$.

1. La variable aléatoire $Y = e^X$ admet-elle une espérance ?
2. Montrer que $Z = X^2$ admet une espérance qu'on calculera.

2.3 Moments d'ordre supérieur, variance

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X, et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dit que X **admet un moment d'ordre** r si X^r admet une espérance. Par le théorème de transfert, c'est le cas si, et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{converge absolument.}$$

Dans ce cas, on note $m_r(X) = E(X^r)$ le **moment d'ordre** r **de** X.

Propriété 12

Soit X une variable aléatoire à densité, et soit $q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $q \leq r$.
Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre q.

Preuve. La preuve est semblable au cas où X est discrète, et laissée en exercice. □

Remarque. Si une variable à densité X admet un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance.

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance, et f_X une densité de X.

On dit que X **admet une variance** si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. D'aprés le théorème de transfert, c'est le cas si, et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{converge } \textbf{absolument}.$$

Dans ce cas, la **variance de** X, notée $V(X)$, est :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Propriété 13

Si X est une variable aléatoire à densité admettant une variance, alors $V(X) > 0$.
On appelle **écart-type de** X, et on note $\sigma(X)$, le réel défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Preuve. Supposons que X admette une variance, et notons f_X une densité de X. La fonction $g : t \mapsto (t - E(X))^2 f_X(t)$ est positive sur $\mathbb{R}$, d'où par positivité de l'intégrale :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

Supposons $V(X) = 0$. Notons $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les points de discontinuité (éventuels) de f_X. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, la fonction g est continue et positive sur $]a_i, a_{i+1}[$, d'intégrale nulle sur cet intervalle. Par théorème de nullité de l'intégrale, g est nulle sur $]a_i, a_{i+1}[$. Puisque de plus $(t - E(X))^2$

s'annule uniquement pour $t = E(X)$, f_X est donc nulle sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points $E(X), a_1, \ldots, a_n$. Mais alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 0$, ce qui est faux puisque cette intégrale est égale à 1. Ainsi $V(X)$ est bien strictement positive. □

Propriété 14

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance, et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $aX + b$ admet une variance, et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Propriété 15 (*Formule de Huygens*)

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance.

Alors X admet une variance si, et seulement si, X admet un moment d'ordre deux. Et lorsque c'est le cas :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exercice. On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x^3} \text{ si } x > 1 \end{cases}$.

a) Montrer que f est une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f.

b) Déterminer l'espérance de X si elle existe.

c) X admet-elle une variance ?

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité.

- X est dite **centrée** si X admet une espérance et si $E(X) = 0$.
- X est dite **centrée réduite** si X admet une variance, et $E(X) = 0, V(X) = 1$.

Propriété 16

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance. Alors :

- $X - E(X)$ est centrée ;
- $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. On l'appelle **la variable aléatoire centrée réduite associée é** X.

3 Lois usuelles

3.1 Loi uniforme

Définition.

On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur un intervalle** $[a, b]$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$) si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$.

Remarque. Les fonctions $\dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b[}$, $\dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{]a,b]}$ et $\dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{]a,b[}$ sont aussi des densités de $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$.

Propriété 17

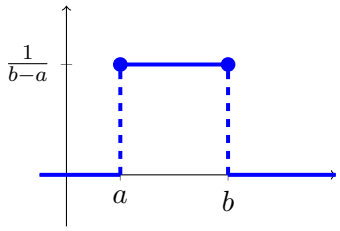
Soit X une variable de loi uniforme sur $[a, b]$. La fonction de répartition de X est :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{si} \quad b < x. \end{cases}$$

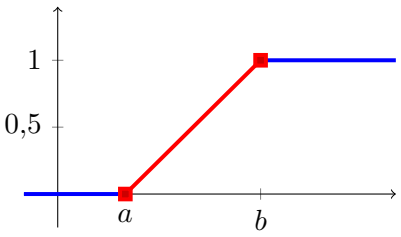
De plus, X admet une espérance et une variance, et :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Représentations graphiques.



Densité de la loi uniforme sur $[a,b]$.



Fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a,b]$.

Cas particulier. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, alors X admet pour densité et fonction de répartition :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

De plus, $E(X) = \dfrac{1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{1}{12}$.

Propriété 18

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]) \quad \Leftrightarrow \quad Y = a + (b-a)X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b]).$$

Preuve.

□

3.2 Loi exponentielle

Définition.

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi exponentielle de paramètre** λ si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ \lambda\, e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

Propriété 19

Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition est donnée par :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

De plus, X admet une espérance et une variance, et :

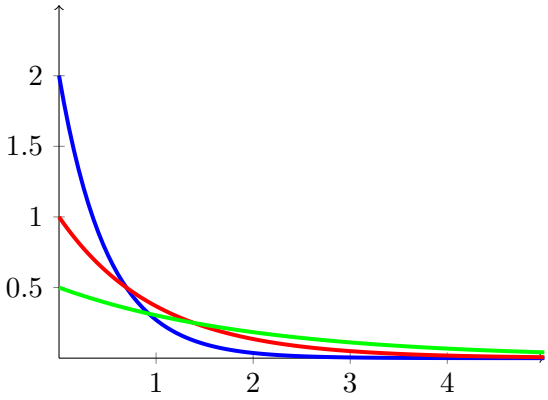
$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Preuve.

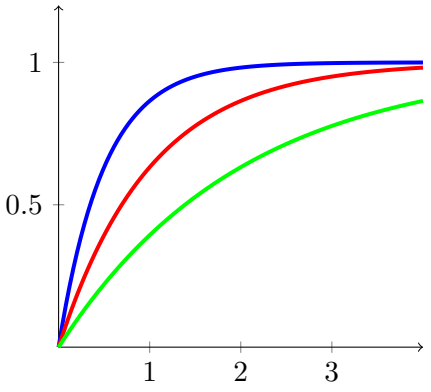
□

Représentations graphiques.

$\lambda = 2, 1, 0.5$



Densité de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.



Fonction de répartition de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

Propriété 20

Soit $\lambda > 0$. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad Y = \lambda X \hookrightarrow \mathscr{E}(1).$$

Preuve.

□

Définition.

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et telle que :

$$\forall x \geq 0, \quad P(X \geq x) > 0.$$

On dit que la loi de X est **une loi sans mémoire** si :

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, \quad P_{[X \geq x]}(X \geq x + y) = P(X \geq y).$$

Propriété 21 (Caractérisation de la loi exponentielle par l'absence de mémoire)

Soit X une variable aléatoire à densité, à valeurs positives et telle que :

$$P(X \geq x) > 0 \text{ pour tout réel } x \geq 0.$$

La loi de X est une loi sans mémoire si et seulement si X suit une loi exponentielle.

Remarque. C'est cette caractéristique qui fait qu'on utilise en général la loi exponentielle pour simuler des phénomènes sans mémoire (temps d'attente d'un bus, durée d'une conversation téléphonique, durée de vie d'un appareil électrique, ...). Qu'on considère que le phénomène démarre à l'instant ou qu'on suppose qu'il a démarré depuis un temps x revient au même.

Preuve. Voir TD

□

3.3 Loi normale

Définition.

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi normale de paramètres** (μ, σ^2) si elle admet pour densité la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Le saviez-vous ?

Plusieurs mathématiciens peuvent revendiquer la découverte de la loi normale. En 1733, Abraham de Moivre est le premier à faire apparaître la loi normale comme loi limite d'une loi binomiale. Plus tard en 1777, Pierre-Simon de Laplace reprend les travaux de de Moivre et généralise son théorème limite à l'aide de la fonction Gamma d'Euler. Il obtient cette même loi, mais en tant qu'approximation de la loi binomiale. Peu de temps après, en 1810, c'est Carl Friedrich Gauss qui l'obtient à son tour en cherchant à minimiser l'erreur de trajectoire d'un objet céleste.

Dans le courant du 19ème siècle, différents noms sont attribués à cette loi, comme *courbe des possibles*, *loi de fréquence des erreurs*, *loi de Gauss* chez les allemands ou les anglo-saxons, ou encore *loi de Laplace* en France. Françis Galton (1877) parle lui de *courbe de forme parfaitement normale*. Le dernier mot revient finalement à Henri Poincaré en 1893 devant ses étudiants : « *Je dirai, pour abréger, que la loi de probabilité est normale, lorsque la valeur de la probabilité est représentée par cette intégrale* ».

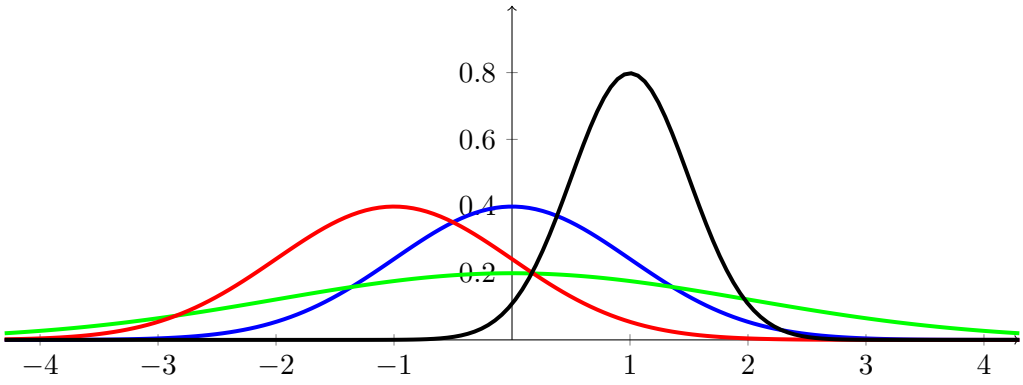
L'adjectif « normal » vient du fait que c'est la loi la plus couramment rencontrée dans la nature (nous l'expliquerons dans un prochain chapitre). Cette dénomination a aussi l'avantage de ne pas fixer la paternité de cette loi, qui est sujette à controverses.



Henri Poincaré (1854 - 1912)

Représentations graphiques.

$(\mu, \sigma) =$(0,1), (0, 2), $(-1, 1)$, $(1, 1/2)$



Densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Propriété 22

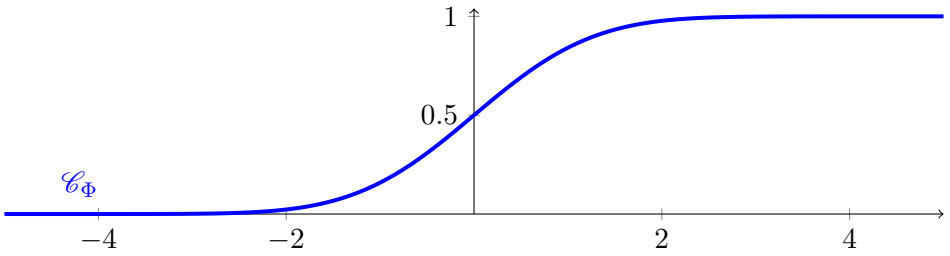
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. X admet une espérance et une variance, et :

$$E(X) = \mu \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2.$$

Cas particulier. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, alors X admet pour densité $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$. On note $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de répartition de X, qui s'exprime sous forme intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{dt}.$$

Représentation graphique.



Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Remarque. On ne peut pas exprimer Φ à l'aide de fonctions usuelles (résultat difficile prouvé par Liouville en 1840). Pour des calculs numériques, on utilise la table de valeurs de la loi normale centrée réduite fournie en fin de chapitre, ainsi que le résultat suivant.

Propriété 23

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. En particulier $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

Illustration graphique. Ce résultat provient de la parité de φ et peut s'obtenir graphiquement :



Preuve.

□

Exercice. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer une valeur approchée de $P(2 \leq X \leq 3)$ et de $P(-3 \leq X \leq 1)$.

Propriété 24

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

$$aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

En particulier :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Preuve.

□

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, il suffit de se rappeler que $aX + b$ suit une loi normale, car on retrouve alors les paramètres en calculant :

$$E(aX + b) = aE(X) + b = a\mu + b \quad \text{et} \quad V(aX + b) = a^2V(X) = a^2\sigma^2.$$

Exercice.

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Exprimer la fonction de répartition de X en fonction de Φ, μ et σ.
2. Application. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(3, \frac{1}{4})$. Donner une valeur approchée de $P(2 \leq X \leq 4)$ et de $P(X \geq 0)$.

3.4 Loi gamma

Propriété 25

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\nu > 0$.

Preuve.

□

Définition.

On appelle **fonction Gamma d'Euler**, et on note Γ, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Propriété 26

(1) $\forall \nu \in]0,+\infty[,\ \Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$.

(3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Preuve.

□

Le saviez-vous ?

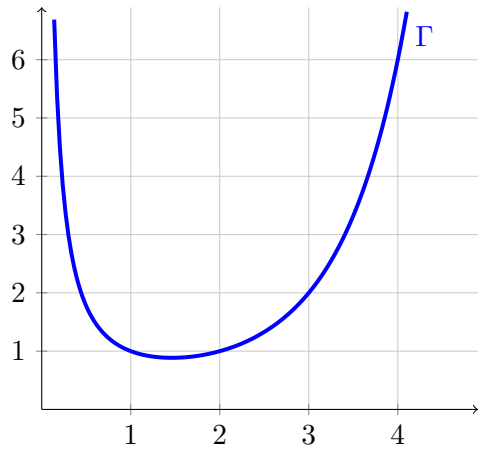
Historiquement, c'est la formule (2) qui a justifiée qu'on s'intéresse à la fonction Γ : les mathématiciens du 18-ème siècle cherchaient un moyen de prolonger la factorielle, a priori définie uniquement pour les nombres entiers, à tous les réels positifs. Euler proposa la fonction Γ en 1729. Première fonction définie à l'aide d'une intégrale, elle se révéla extrêmement féconde.

Leonhard Euler (1707 - 1783) est considéré comme l'un des plus grands et des plus prolifiques mathématiciens de tous les temps. Il a travaillé dans presque tous les domaines des mathématiques : la géométrie, le calcul infinitésimal, la trigonométrie, l'algèbre et la théorie des nombres. S'ils étaient imprimés, ses écrits, dont beaucoup sont d'un intérêt fondamental, pourraient occuper entre quarante et soixante ouvrages. Devenu aveugle à la fin de sa vie, son état n'a eu que peu d'effet sur sa productivité. En fait, elle augmenta même. Ainsi avec l'aide de scribes, il produisit en moyenne un document de mathématiques par semaine au cours de l'année 1775 !



Leonhard Euler (1707 - 1783)

Représentation graphique.



Courbe représentative de la fonction Γ.

Remarque. On sait que $e^n = o(n!)$. Une étude plus poussée de la fonction Γ nous permettrait de montrer que :

$$e^x \underset{x\to+\infty}{=} o(\Gamma(x)).$$

Autrement dit, la fonction Γ tend vers $+\infty$ « plus vite » que la fonction exponentielle.

Définition.

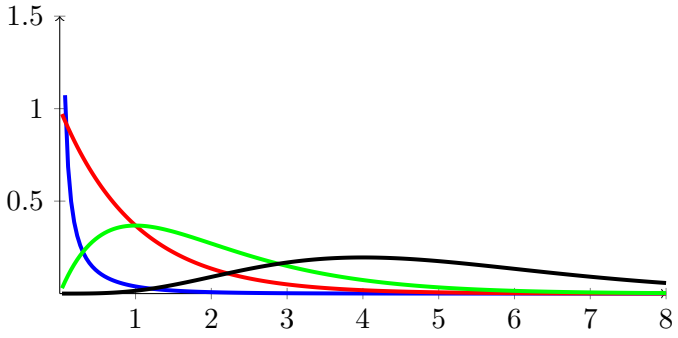
Soit $\nu > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi gamma de paramètre** ν si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-t} & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}$$

On note alors $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$.

Remarque. Vérifions que f est bien une densité de probabilité.

Représentations graphiques.



$\nu =$0.1, 1, 2, 5

Densité de la loi Gamma $\gamma(\nu)$.

Remarques.

- La densité d'une loi $\gamma(\nu)$ est bornée si, et seulement si, $\nu \geq 1$.
- Puisque $\Gamma(1) = 0! = 1$, une densité de la loi $\gamma(1)$ est :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(1)} t^{1-1} e^{-t} & \text{si } t > 0. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ e^{-t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Ainsi, la loi $\gamma(1)$ n'est autre que la loi $\mathscr{E}(1)$.

Propriété 27

Soit $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$. Alors X admet une espérance et une variance, et :

$$E(X) = \nu \quad \text{et} \quad V(X) = \nu.$$

Preuve.

□

4 Simulation en Python

Rappelons que le sous-module `numpy.random` est dédié aux simulations de variables aléatoires.

Définition.

On importe la bibliothèque `numpy.random` en écrivant l'une ou l'autre des instructions suivantes (on privilégiera la deuxième) :

`from numpy.random import *` ou `import numpy.random as rd`

Définition.

- `rd.random()` simule une réalisation de la loi uniforme sur $[0,1]$.
- `rd.exponential(1/a)` simule une réalisation de la loi exponentielle $\mathscr{E}(a)$ de paramètre $a>0$.
- `rd.gamma(v)` simule une réalisation de la loi gamma $\gamma(v)$ de paramètre $v>0$.
- `rd.normal(m,sigma)` simule une réalisation de la loi normale $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$ de paramètres $m\in\mathbb{R}$ et $\sigma>0$.

Remarques.

- On peut obtenir r simulations d'une loi usuelle sous la forme d'un vecteur de taille r, ou $r\times s$ simulations sous la forme d'une matrice de $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ en ajoutant à ces commandes l'argument `r` ou `[r,s]` respectivement. Par exemple :
  - `rd.exponential(1/a,r)` renvoie un vecteur contenant r simulations de la loi exponentielle $\mathscr{E}(a)$;
  - `rd.normal(m,sigma,[r,s])` renvoie $r\times s$ simulations de la loi normale de paramètres m et σ^2.
- Attention à certains paramètres :
  - le paramètre de la loi exponentielle choisi par `Python` est l'inverse de celui du cours.
  - le second paramètre de la loi normale est σ et non σ^2.
  - par défaut, `rd.normal()` simule la loi normale centrée réduite.
- La simulation d'une variable de loi uniforme sur $[a,b]$, où $a<b$, s'obtient à l'aide de la commande hors programme `rd.uniform(a,b)` ou bien, en restant dans le cadre du programme, par la commande `(b-a)*rd.random()+a`.

Sur l'utilisation de la fonction de répartition Φ associée à la loi $\mathscr{N}(0,1)$ en `Python`, elle nécessite d'importer la librairie `spicy.special` avec la commande suivante :

`import spicy.special as sp`

Définition.

- Pour tout réel x, la commande `sp.ndtr(x)` renvoie la valeur de $\Phi(x)$.
- (Hors programme) Pour tout réel $y\in]0,1[$, la commande `sp.ndtri(y)` renvoie la valeur de $\Phi^{-1}(y)$

5 Tableau récapitulatif

Nom	Notation	Une densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
Loi uniforme sur $[a,b]$ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$	$\mathscr{U}([a,b])$	$x\mapsto\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a\le x\le b\\ 1 & \text{si } x>b\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Loi uniforme sur $[0,1]$	$\mathscr{U}([0,1])$	$x\mapsto\mathbb{1}_{[0,1]}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } 0\le x\le 1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{12}$
Loi exponentielle de paramètre λ $\lambda\in]0,+\infty[$	$\mathscr{E}(\lambda)$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Loi exponentielle de paramètre 1 = Loi gamma de paramètre 1	$\mathscr{E}(1)=\gamma(1)$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ e^{-x} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-x} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$	1	1
Loi normale centrée réduite	$\mathscr{N}(0,1)$	$x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$	$\Phi: x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$	0	1
Loi normale (ou de Laplace-Gauss) $m\in\mathbb{R},\sigma^2\in]0,+\infty[$	$\mathscr{N}(m,\sigma^2)$	$x\mapsto\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	$x\mapsto\Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$	m	σ^2
Loi gamma de paramètre ν $\nu\in]0,+\infty[$	$\gamma(\nu)$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$	$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\displaystyle\int_0^x t^{\nu-1}e^{-t}\mathrm{d}t & \text{si } x>0\end{cases}$	ν	ν

Table de la loi normale centrée réduite

Le tableau qui suit comporte les valeurs de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

Utilisation. On lit les décimales en suivant les lignes, et les centièmes en colonnes. Par exemple, la valeur de $\Phi(1.65)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.6 et de la colonne 0.05. On trouve $\Phi(1.65) = 0.9505$, à 10^{-4} près.

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Rappelons quelques propriétés de Φ :

- Φ est continue et strictement croissante, et $\Phi(\mathbb{R}) =]0,1[$. Ainsi :
  - pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique $t_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(t_\alpha) = \alpha$ (théorème de la bijection).
  - pour tout $x \geq 3.99$, $\Phi(x) = 1.000$, à 10^{-4} près.
- $\Phi(0) = 0.5$ et $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour toute autre loi normale, on se rappellera que :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$