Formulaire

Algèbre linéaire

Disclaimer : ces fiches ne remplacent pas la connaissance du cours vu en ECG1/ECG2. Ce sont des synthèses à utiliser comme outil de révision.

1 Calcul Matriciel

Je ne redonne ici que les formules qu'il me semble possible que vous ayez oubliées, si d'autres définitions/formules vous manquent, vous savez où est le cours de première année!

1.1 Produit matriciel

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,\boldsymbol{p}}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{\boldsymbol{p},q}(\mathbb{R})$. On définit la matrice $C = A \times B$ de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad [C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} \times [B]_{k,j}$$

Propriété 1 (du produit matriciel)

Soient A, B, C des matrices, λ un réel. Dans le cas où les sommes et produits matriciels sont bien définis :

- **Associativité :** $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
- **Distributivité :** $A \times (B+C) = A \times B + A \times C$ et $(A+B) \times C = A \times C + B \times C$.
- $\lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B)$.
- $I_n \times A = A \times I_n = A$ et $0_n \times A = A \times 0_n = 0_n$.

Mise en garde.

Le produit matriciel n'est en général pas commutatif!

1.2 Transposée

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **matrice transposée de** A la matrice notée ${}^tA$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad [{}^tA]_{i,j} = [A]_{j,i}.$$

Autrement dit, ${}^tA$ est obtenue à partir de A par échange de ses lignes et de ses colonnes.

Exemple. ${}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Propriété 2 (de la transposition)

- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad {}^t\left({}^tA\right) = A.$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall (A,B) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2, \quad {}^t(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \cdot {}^tA + \mu \cdot {}^tB.$
- $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}), \quad {}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA.$

2 Systèmes linéaires

2.1 Définitions

Définition.

- On appelle **système linéaire à n équations et p inconnues** un système de la forme :

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

  où les $x_j \in \mathbb{R}$ sont appelés les **inconnues** du système, les $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ sont les **coefficients** du système, et les $b_i \in \mathbb{R}$ forment le **second membre** du système.

- Lorsque les b_i sont tous nuls, on dit que le système $(\mathscr{S})$ est **homogène**.

  Dans le cas général, on appelle **système homogène associé à** $(\mathscr{S})$ le système $(\mathscr{S}_0)$ obtenu en remplaçant le second membre $(b_1, \ldots, b_n)$ par $(0, \ldots, 0)$.

- On appelle **matrice des coefficients** de $(\mathscr{S})$ la matrice

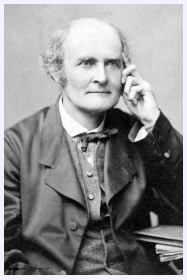
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Remarque. $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ solution de $(\mathscr{S}) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ solution de $A \times X = B$.

Le saviez-vous ?

Le mot *matrice* est formé sur le mot latin *mater* qui signifie *mère*. Il apparait au Moyen Âge : comme on enregistrait les enfants à la naissance, il désigna rapidement le registre où on les inscrivait, d'où les mots *matricule* et *immatriculation*.

Au début de l'imprimerie, *matrice* désignait le moule à imprimer sur lequel on place les caractères. Par analogie, James Joseph Sylvester (1814 - 1897) utilisa ce mot pour nommer le tableau où l'on enregistre les coefficients d'un système linéaire. Son ami Arthur Cayley (1821 - 1895) introduisit les opérations usuelles du calcul matriciel (addition, multiplication), et jeta les bases de la théorie des matrices.



Arthur Cayley (1821 - 1895).

2.2 Échelonnement et méthode du pivot de Gauss

Définition.

- Une matrice est dite **échelonnée par lignes** si chaque ligne non nulle commence par strictement plus de zéros que la ligne précédente, i.e. si elle est de la forme générale suivante :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  où $\oplus$ sont des réels non nuls et $*$ sont des réels.

  Les réels $\oplus$ sont appelés les **pivots** de la matrice échelonnée par lignes. Ce sont les premiers coefficients non nuls de chaque ligne non nulle.

- Un système est dit **échelonné par lignes** si la matrice de ses coefficients l'est.
- Pour une matrice ou un système, on appelle **rang** le nombre de lignes non nulles.

Théorème 3 (*Pivot de Gauss* (1777 - 1855))

Tout système (ou matrice) peut se ramener par opérations élémentaires sur ses lignes à un système (ou matrice) échelonné(e) par lignes.

Le saviez-vous ?

Cette méthode porte le nom du mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Elle lui est pourtant bien antérieure, puisqu'elle était connue des mathématiciens chinois depuis au moins le 1er siècle de notre ère. Sa paternité reviendrait même à un certain Chang Ts'ang, chancelier de l'empereur de Chine au 2-ième siècle avant notre ère.

En Europe, cette méthode fut découverte et présentée bien plus tard, en 1810, par Carl Friedrich Gauss dans un livre étudiant le mouvement d'un astéroùde. On lui associe aujourd'hui son nom.



Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Mise en garde.

Vous pourriez être tenté de vous écarter de la méthode du pivot en pensant à d'autres opérations élémentaires qui vous sembleraient plus « intéressantes ». L'expérience montre que ce n'est jamais une réussite. Le plus efficace est de suivre strictement chaque étape du pivot de Gauss.

2.3 Résolution d'un système linéaire

Propriété 4

Soit $(\mathscr{S}_0)$ un système linéaire **homogène** de n équations à p inconnues, de rang r.

- Si $r = p$ (rang = nombre d'inconnues), le système possède pour unique solution $(0, \dots, 0)$;
- si $r < p$ (nombre d'inconnues paramètres > 0), le système possède une infinité de solutions.



Pour aller plus loin.

On peut montrer que si $r < p$, l'ensemble E_0 des solutions de $(\mathscr{S}_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ de dimension le nombre $(p - r)$ d'inconnues paramètres.

3 Matrices carrées

3.1 Matrices carrées particulières

Définition.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

- La famille $([A]_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ est appelée la **diagonale** de A.
- S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda \cdot I_n$, on dit que A est une matrice **scalaire** ;
- Si $[A]_{i,j} = 0$ pour tous $i \neq j$, A est dite **diagonale** ;
- Si $[A]_{i,j} = 0$ pour tous $i > j$ (resp. $i < j$), c'est-à-dire si tous ses coefficients situés en dessous (resp. au dessus) de sa diagonale sont nuls, alors A est dite**triangulaire supérieure** (resp. **triangulaire inférieure**) ;
- A est dite **triangulaire supérieure stricte** (resp. **inférieure stricte**) si A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) et si de plus sa diagonale est nulle.

Définition.

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est :

- **symétrique** si ${}^tA = A$;
- **antisymétrique** si ${}^tA = -A$.

On notera $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarques.

- La diagonale d'une matrice antisymétrique est toujours nulle.
- Les ensembles $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: ils contiennent 0_n et sont stables par combinaison linéaire. Mais ils ne sont pas stables par produit puisque par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \text{ mais } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathscr{S}_n(\mathbb{R}).$$

3.2 Matrices inversibles

Définition.

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

Une telle matrice B est unique. On l'appelle **l'inverse** de A, et on la note A^{-1}.
L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$, et appelé **groupe linéaire d'ordre** n.

Propriété 5 (de l'inverse)

- Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont deux matrices inversibles, alors $A \times B$ l'est aussi et son inverse est :
$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$$
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors ${}^tA$ l'est aussi et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

Théorème 6 (Caractérisation des matrices inversibles)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est une matrice inversible ;

(ii) il existe $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A' \times A = I_n$ (et alors $A^{-1} = A'$) ;

(iii) il existe $B' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B' = I_n$ (et alors $A^{-1} = B'$) ;

(iv) le système $AX = 0_{n,1}$ admet une seule solution ($X = 0_{n,1}$) ;

(v) le rang (du système associé à) la matrice A est n ;

(vi) Pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ admet une unique solution (qui est $X = A^{-1}B$).

Propriété 7 (Cas des matrices triangulaires et diagonales)

- Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, **tous** ses coefficients diagonaux sont non nuls.
- En particulier une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $\lambda_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et dans ce cas, $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

4 Espaces vectoriels

Définition.

Un $\mathbb{R}$-**espace vectoriel** est un ensemble E muni de deux lois :

- une loi $+$ d'addition de deux éléments de E,
- une loi $\cdot$ de multiplication d'un élément de $\mathbb{R}$ et d'un élément de E,

qui vérifient un certain nombre de propriétés de calcul.

Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés **scalaires**.

Propriété 8 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel)

Une partie F d'un espace vectoriel E est un **sous-espace vectoriel** de E si, et seulement si :

(i) $0_E \in F$; (ii) $\forall (u,v) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Propriété 9

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un s.e.v. de E.

5 Familles de vecteurs, bases, dimension

Définition.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ des éléments d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

On dit que $(u_1, \dots, u_p)$ est une **famille libre** (ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont **linéairement indépendants**) si :

$$\forall (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i = 0_E \ \Rightarrow \ (\forall i \in [\![1,p]\!], \ \lambda_i = 0) \right).$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est **liée** (ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont **linéairement dépendants**), ce qui s'écrit :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0), \quad \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E.$$

Propriété 10

- Une famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts est libre.
- Une famille de matrices-colonne ou de n-uplets échelonnée est libre.

Définition.

Une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite **génératrice** de E si :

$$E = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p), \quad \text{i.e. : } \forall u \in E, \ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \ u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i.$$

Propriété 11

- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Définition.

Une famille de vecteurs de E libre et génératrice est appelée **base** de E.

Propriété 12

Une famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si, et seulement si, tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$, c'est-à-dire :

$$\forall u \in E,\ \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés **coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$**.

Définition.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- Soit $u \in E$, et $(m_1, \dots, m_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire l'unique n-uplet de scalaires tel que :
$$u = m_1 \cdot e_1 + \dots + m_n \cdot e_n.$$
On appelle *matrice des coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$* la matrice colonne, notée $M_{\mathscr{B}}(u)$, de ces coefficients dans la base $\mathscr{B}$:
$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{matrix} u \\ \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}.$$
- Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$, une famille de vecteurs de E.
On appelle *matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathscr{B}$*, et on note $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = M_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_p)$, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j-ème colonne est $M_{\mathscr{B}}(u_j)$:
$$M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{matrix} u_1 & \cdots & u_j & \cdots & u_p \end{matrix} \begin{matrix} \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,j} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & \cdots & m_{2,j} & \cdots & m_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,j} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \quad \text{où} \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \cdot e_i \text{ pour tout } 1 \leq j \leq p.$$

Dimension

Définition.

On dit qu'un espace vectoriel E est *de dimension finie* s'il existe une famille génératrice finie de E.

Théorème 13

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E, et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. Alors on peut compléter $\mathscr{L}$ à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$ pour former une base de E.

Corollaire 14

- Tout espace vectoriel E de dimension finie admet une base.
- De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E (*Théorème de la base extraite*).
- Toute famille libre peut être complétée en une base de E (*Théorème de la base incomplète*).

Théorème 15

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal n. L'entier n s'appelle la **dimension de** E et est noté $\dim(E)$.

Corollaire 16

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E.

- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$;
- $F = E \quad \Leftrightarrow \quad \dim(F) = \dim(E)$.

Propriété 17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors :

- toute famille libre de E est de cardinal inférieur ou égal à n ;
- une famille libre de cardinal n est une base de E ;
- toute famille génératrice de E est de cardinal supérieur ou égal à n ;
- une famille génératrice de E de cardinal n est une base de E.

Définition.

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle *rang de* $(u_1, \dots, u_p)$ et on note $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$ la dimension de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Propriété 18

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dimension finie n, et $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$. Alors :



- $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq \min(p, n)$.
- La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre si, et seulement si, $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$.
- La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E si, et seulement si, $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$.

Définition.

Si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle **rang de** M, et on note $\text{rg}(M)$ le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Propriété 19

Si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^tM)$.

Propriété 20

(1) Le rang d'une matrice A est invariant lorsqu'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A.

(2) Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice qu'on ramène par opérations élémentaires sur les lignes à une matrice échelonnée par lignes A'.

Le rang de A est le nombre de pivots non nuls dans A' (i.e. le rang du système linéaire homogène associé à A).

Propriété 21

Si $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie, et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors le rang de $\mathscr{F}$ est égal au rang de la matrice $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

Corollaire 22

Supposons E de dimension n, et soit $\mathscr{B}$ une base de E.

$$\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \text{ est inversible.}$$

6 Applications Linéaires

Définition.

Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si elle satisfait :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x, y) \in E^2, \quad f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y).$$

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

- Si $E = F$, on dit que f est un **endomorphisme**, et on notera $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Si $F = \mathbb{R}$, on dit que f est une **forme linéaire**.

Propriété 23

- $\mathscr{L}(E, F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$.

6.1 Noyaux, images

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

Définition.

On appelle **noyau de** f, et on note $\mathrm{Ker}(f)$, l'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}.$$

Propriété 24

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- f est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Définition.

On appelle **image de** f, et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F,\ \exists x \in E\ :\ f(x) = y\}.$$

Propriété 25

- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = F$.

Théorème 26

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = x_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

De plus :

- f est injective si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est libre.
- f est surjective si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est génératrice.
- f est bijective si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une base.

Corollaire 27

- Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.
- Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Corollaire 28

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose E de dimension finie, et on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, et :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

6.2 Rang d'une application linéaire

Définition.

On suppose E de dimension finie, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **rang de** f, et on note $\mathrm{rg}(f)$, l'entier :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Théorème 29 (*du rang*)

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, E supposé de dimension finie. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Corollaire 30

On suppose que E et F sont de **même dimension finie**, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre :

(1) f est bijective ; (2) f est injective ; (3) f est surjective.

6.3 Isomorphismes

Définition.

On dit qu'une application $f : E \to F$ est un **isomorphisme** si f est linéaire et bijective.
Si de plus $E = F$, on dit que f est un **automorphisme de** E.

Propriété 31

Soit $f : E \to F$ un isomorphisme. Notons $f^{-1} : F \to E$ sa bijection réciproque. Alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$.

Propriété 32

On suppose que E et F sont de **même dimension finie**, et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre :

(1) f est bijective ; (2) $\exists g \in \mathscr{L}(F, E), g \circ f = \mathrm{Id}_E$; (3) $\exists h \in \mathscr{L}(F, E), f \circ h = \mathrm{Id}_F$.

Et dans ce cas, $f^{-1} = g = h$.

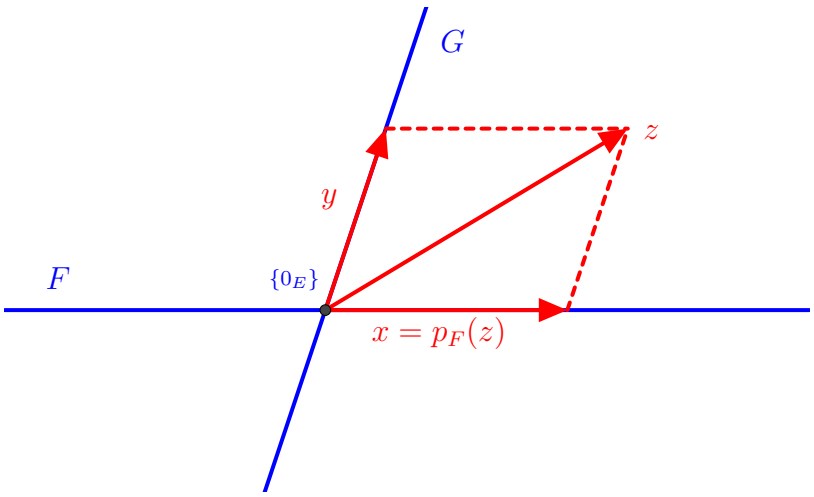
6.4 Projecteurs

Définition.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour tout $z \in E$, il existe donc un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$.

- Le vecteur x est appelé **la projection de** z **sur** F **parallèlement à** G, et noté $p(z)$.
- L'application $p : E \to E$ ainsi définie est appelée le **projecteur sur** F **parallèlement à** G

Illustration graphique. Pour projeter z sur F, on trace la parallèle à G passant par l'extrémité de z. La projection x de z sur F est donnée par l'intersection de cette parallèle à G avec F.



Projection sur F parallèlement à G.

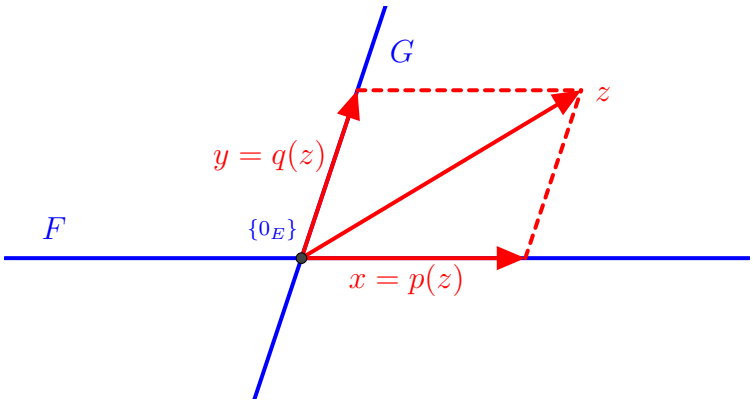
Remarque. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $q = \mathrm{Id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F. En effet, si $z \in E$, alors en notant $(x, y) \in F \times G$ tels que $z = x + y$, on remarque que :

$$q(z) = z - p(z) = x + y - x = y.$$

De plus, $p \circ q = p \circ (\mathrm{Id}_E - p) = p - p^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, et de même $q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On retiendra donc :

$$p + q = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

On dit que p et q sont les **projecteurs associés à la décomposition** $E = F \oplus G$.



Projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$.

Propriété 33

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

$$p \text{ est un projecteur} \quad \Leftrightarrow \quad p \circ p = p.$$

Plus précisément, $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Définition.

Soient F et G des sous-espaces supplémentaires de E, et soit p et q les projecteurs associés. On appelle **symétrie par rapport à F dans la direction de G** l'endomorphisme $s = p - q = \mathrm{Id}_E - 2q$.