Formulaire

Études de suite

Disclaimer : ces fiches ne remplacent pas la connaissance du cours vu en ECG1. Ce sont des synthèses à utiliser comme outil de révision.

1 Suites classiques

Propriété 1 (Suites arithmétiques, suites géométriques)

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite *arithmétique* lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

  Expression explicite : pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite *géométrique* lorsqu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

  Expression explicite : pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, $u_n = q^{n-n_0}u_{n_0}$.

Propriété 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 1$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b. \tag{1}$$

Expression explicite : On trouve $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$ (c'est-à-dire α est une suite constante solution) et on pose $v_n = u_n - \alpha$. Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a. On en déduit son terme général puis celui de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = a^n v_0 = a^n(u_0 - \alpha) \text{ et } \boxed{u_n = v_n + \alpha = a^n(u_0 - \alpha) + \alpha.}$$

Propriété 3 (Relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients réels)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait une *relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients réels* s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Expression explicite : On résout l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$.

- S'il y a deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$.
- S'il y a une unique solution réelle x_0, alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha + \beta n)x_0^n$.

Pour déterminer α et β, on utilise deux termes de la suite (habituellement u_0 et u_1).



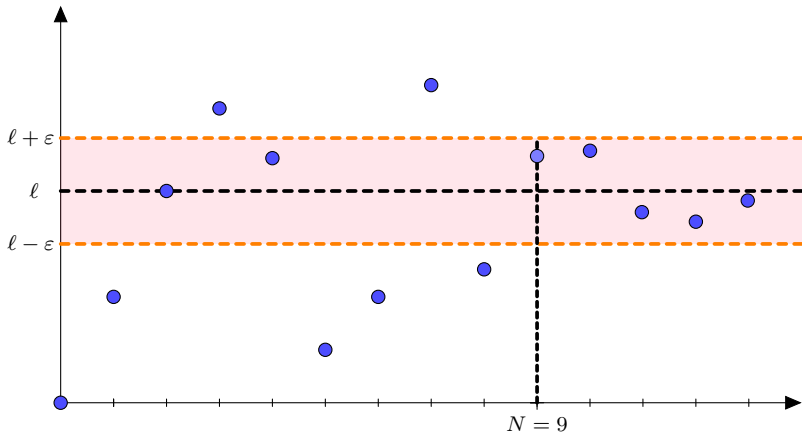
Mise en garde.

Il est important de savoir étudier ces suites! Voir cours première année si vous ne vous rappelez plus.

2 Convergence des suites réelles

Définition.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ si pour tout réel a, les u_n sont strictement plus grand que a pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ u_n > a.$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$ si pour tout réel b, les u_n sont strictement plus petit que b pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux, ce qui s'écrit en termes quantifiés :
$$\forall b \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ u_n < b.$$



Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ : pour tout $n \geq N$, u_n est dans la « bande » $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

Propriété 4 (de convergence à partir des suites extraites paires et impaires)

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers la même limite** $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Propriété 5 (*de passage à la limite dans les inégalités*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers des limites finies ℓ et ℓ' respectivement.
Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$.

Mise en garde.

Les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite. Par exemple, on a $\dfrac{1}{n+1} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \not> 0$.

Théorème 6 (*de la limite monotone*)

- Toute suite **croissante** et **majorée** converge.
  Toute suite **croissante** et **non majorée** diverge vers $+\infty$.
- Toute suite **décroissante** et **minorée** converge.
  Toute suite **décroissante** et **non minorée** diverge vers $-\infty$.

Théorème 7 (*d'encadrement* ou *des gendarmes*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant :

(1) $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang ;

(2) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Propriété 8

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

- Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Définition.

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si :

(1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; (2) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; (3) $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Théorème 9 (*des suites adjacentes*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. Alors **elles convergent vers la même limite** $\ell \in \mathbb{R}$, et on a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$