Formulaire

Fonctions : limite, continuité et dérivabilité

Disclaimer : ces fiches ne remplacent pas la connaissance du cours vu en ECG1. Ce sont des synthèses à utiliser comme outil de révision.

1 Limites de fonctions

Dans toute la suite, f est une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, x_0 est un élément ou une extrémité de I.

Définition.

On dit que f *admet* $\ell \in \mathbb{R}$ *pour limite en* x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],\ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Lorsque x_0 appartient à I, on dira que f *est continue en* x_0, et dans ce cas $\ell = f(x_0)$. Sinon on dira que f *se prolonge par continuité en* x_0 en posant $f(x_0) = \ell$.

On dit que f *est continue sur* I si f est continue en tout point de I.

Remarque. Cette définition s'étend au cas où f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$, aux limites à droite $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ et à gauche $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$. On définit de manière analogue les limites en $\pm\infty$ et les limites infinies.
On révisera si nécessaire les opérations sur les limites (somme, produit, quotient et composée).

Propriété 1 (Limites usuelles en 0)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Propriété 2 (*Caractérisation séquentielle de la limite*)

On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers x_0 :

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell.$$

En particulier, si f est continue en x_0 et si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_0, alors la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Remarque : Cette caractérisation est très utile pour montrer qu'une limite n'existe pas : il suffit de trouver deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 telles que les suites $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers des limites différentes.

Propriété 3 (Continuité en un point)

f est continue en $x_0 \in I$ si, et seulement si, f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

2 Théorèmes de continuité

Propriété 4 (*de comparaisons*)

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in I, \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Soit x_0 un point ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

- *Théorème des gendarmes.* Si g et h admettent une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut ℓ.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe et vaut $+\infty$.
- Si f et h admettent ℓ et ℓ' pour limites finies respectives en x_0, alors $\ell \leq \ell'$.

Propriété 5 (*de la limite monotone*)

Soit f une fonction croissante[a] sur un intervalle I.

- Supposons que $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.
  - Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b.
    Sinon f diverge vers $+\infty$.
  - Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a.
    Sinon, f diverge vers $-\infty$.
- Soit $x_0 \in I$. La fonction f admet une limite à gauche et à droite en x_0, et :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

[a] Le cas d'une fonction décroissante s'énonce de manière analogue.

Théorème 6 (*des valeurs intermédiaires*)

L'image d'un intervalle par une fonction **continue** est un intervalle.

Autrement dit, si I est un intervalle et f une fonction **continue** sur I, alors pour tout $a, b \in I$ avec $a < b$, et pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y$ admet **au moins une solution** dans $[a, b]$.

Propriété 7 (*des bornes atteintes*)

Une fonction **continue sur un segment** est bornée et atteint ses bornes.

En particulier, l'image d'un segment $[a,b]$ par une fonction continue est un segment et les bornes sont atteintes :

$$\exists \alpha, \beta \in [a,b], \quad f(\alpha) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } f(\beta) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Théorème 8 (*de la bijection*)

On suppose f **continue et strictement monotone** sur un intervalle I. Alors :

- f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

  Autrement dit, pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet **une unique solution** dans I.

- En notant f^{-1} sa bijection réciproque de J sur I, on a :
  - pour tout $x \in I$ et $y \in J$,

    $$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

    En particulier :

    $$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1}(y) = y.$$

  - f^{-1} est continue sur J et a même sens de variation que f ;
  - dans un repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3 Dérivation

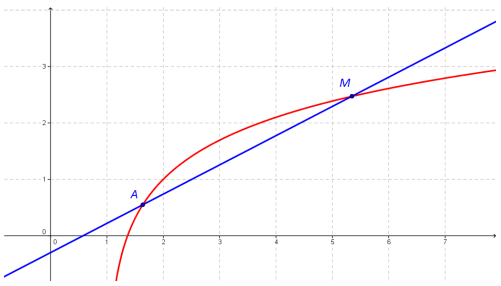
Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f *est dérivable en* a si son *taux d'accroissement* en a :

$$\tau_a(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

admet une limite finie en a. Cette limite, lorsqu'elle existe, est la *dérivée* de f en a. On la notera $f'(a)$.

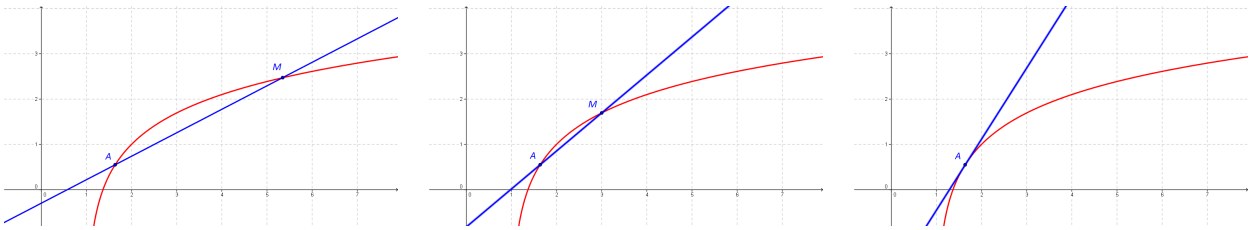
Interprétation géométrique. Fixons $a \in I$ et considérons $m \in I$, $m \neq a$. On note $A(a, f(a))$ et $M(m, f(m))$ un point distinct de A appartenant à la courbe représentative de f.



Rappelons que la droite (ou corde) (AM) a pour équation cartésienne :

$$y = \frac{f(m) - f(a)}{m - a}(x - a) + f(a).$$

Par définition, f est dérivable en a si, et seulement si, le coefficient directeur de la corde (AM) admet une limite finie quand m tend vers a.



Dans ce cas, la position limite de la droite (AM) lorsque M tend vers A est la *tangente* à $\mathscr{C}_f$ au point A. Son coefficient directeur est donc $f'(a)$, et son équation cartésienne est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Propriété 9 (La dérivabilité implique la continuité)

Si f est dérivable en a, **alors** f est continue en a.

Mise en garde.

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en un point et non dérivable en ce point. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 et non dérivable en 0.

Je vous remets ici un tableau des dérivées usuelles :

$f : x \mapsto \ldots$	$f' : x \mapsto \ldots$	Ensemble de dérivabilité
$\alpha \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}_-^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Propriété 10

Soient f et g deux fonctions dérivables (resp. $\mathscr{C}^1$).

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable (resp. $\mathscr{C}^1$) sur I et :
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$
- $(f \times g)$ est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I et : $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.
- Si g ne s'annule pas sur I, $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I et :
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}.$$
- Si f est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I et si g est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur $J \supset f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^1$) sur I et :
$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

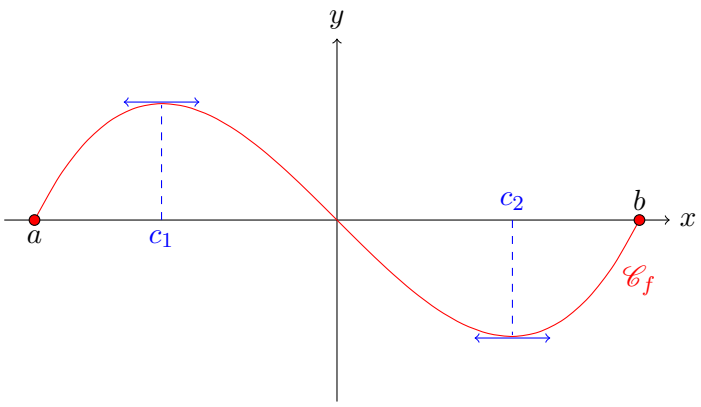
Propriété 11 (Dérivabilité de la fonction réciproque)

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J. f^{-1} est dérivable sur J si, et seulement si, f est dérivable sur I et f' **ne s'annule pas** sur I. Et dans ce cas :
$$\forall\, y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Propriété 12 (*Théorème de Rolle* (1652 - 1719))

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$, **dérivable** sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque. L'élément $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ n'est pas forcément unique, comme dans l'exemple suivant :



Propriété 13 (*Égalité des accroissements finis*)

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **continue** sur $[a, b]$ et **dérivable** sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Interprétation géométrique. L'égalité des accroissements finis se récrit $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. C'est en fait un théorème de Rolle "penché".

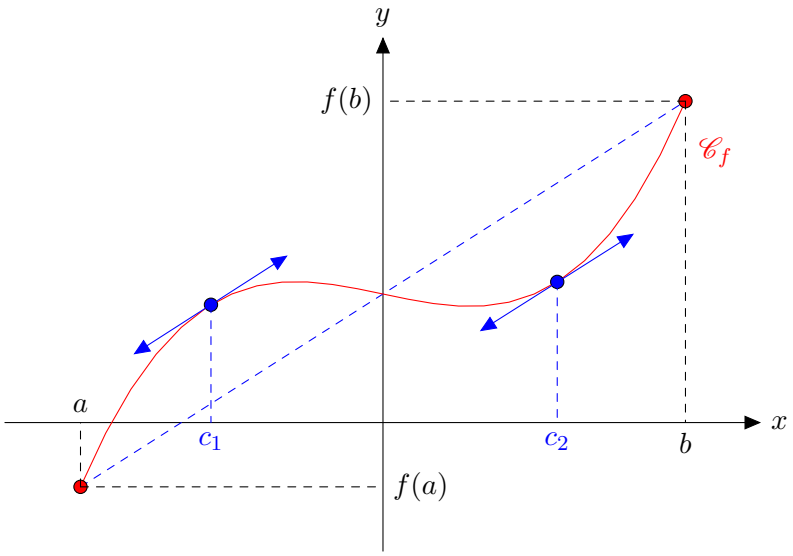


Illustration de l'égalité des accroissements finis.

De l'égalité des accroissements finis on tire les deux résultats suivants :

Théorème 14 (*Inégalité des accroissements finis*)

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I. S'il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq k$, alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

Propriété 15

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est constante sur I si, et seulement si, f' est nulle sur I.
- f est croissante (resp. décroissante) sur I si, et seulement si, f' est positive (resp. négative) sur I.
- f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si, et seulement si, f' est positive (resp. négative) sur I et non identiquement nulle sur aucun intervalle ouvert $]a, b[$ inclus dans I.

  En particulier, si f' est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Propriété 16 (*Passage à la limite sur la dérivée*)

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction **continue sur** I et **de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $I \setminus \{x_0\}$. On suppose que $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe et est finie égale à $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(x_0) = \ell$.