Chapitre 0

Fonctions convexes

On revoit et on approfondit dans ce chapitre les notions de convexité et de concavité d'une fonction. On s'intéresse également à la notion de point d'inflexion.

Définition.

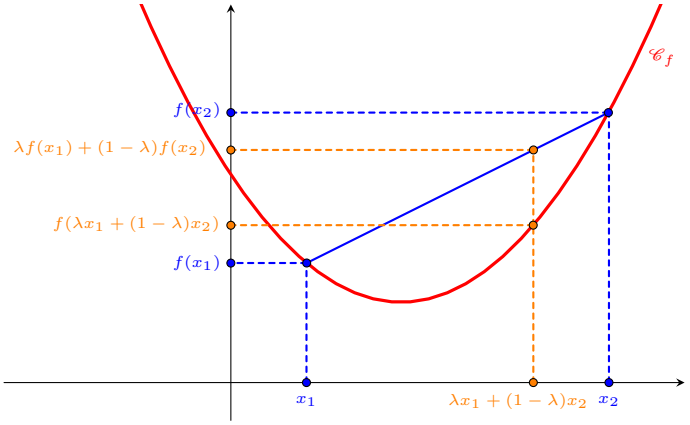
On dit qu'une fonction f est *convexe* sur un intervalle I si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

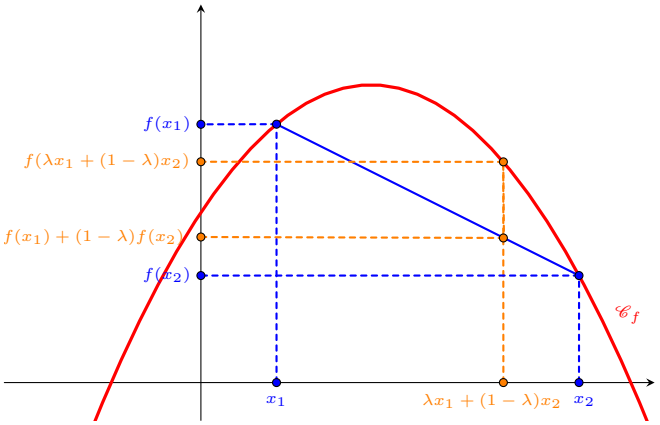
On dit que f est *concave* sur I si $-f$ est convexe sur I, c'est-à-dire si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Interprétation graphique.



f est **convexe** : pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, l'image de tout point du segment $[x_1, x_2]$ est **en dessous de la corde** passant par les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$.



f est **concave** : pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$, l'image de tout point du segment $[x_1, x_2]$ est **au dessus de la corde** passant par les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$.

Théorème 1 (Inégalité de Jensen)

On suppose que f est définie sur I. Alors f est convexe sur I si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n, \quad \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n,$$

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \quad \Rightarrow \quad f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Le même résultat est vrai si f est concave, mais avec l'inégalité inversée:

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \quad \Rightarrow \quad f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Preuve. L'un des sens est évident : si la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, elle est en particulier vraie pour $n = 2$ et donc f est convexe sur I.

□

Remarque : Comme la valeur absolue est une fonction convexe, on peut ici retrouver l'inégalité triangulaire. Cette inégalité de Jensen est étendable en passant à l'intégrale, voir exercice du TD. On comprend ainsi pourquoi je vous appelle l'inégalité triangulaire sur les intégrale "l'inégalité de Jensen".

Théorème 2 (CNS de convexité pour une fonction $\mathscr{C}^2$)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.



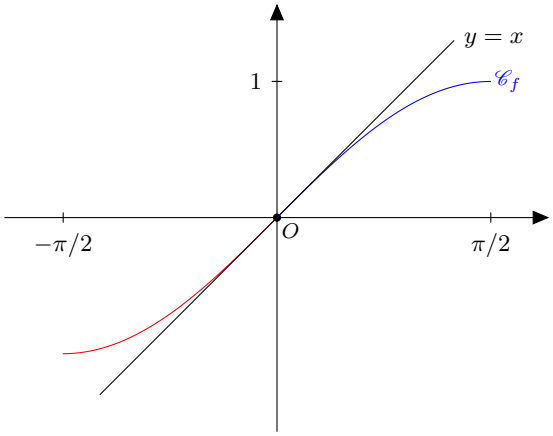
$$\begin{aligned} f \text{ est convexe sur } I &\Leftrightarrow \mathscr{C}_f \text{ est au dessus de ses tangentes sur } I \\ &\Leftrightarrow f' \text{ est croissante sur } I \\ &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f''(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Ce résultat est très utile en pratique puisque la plupart des fonctions étudiées en ECG est $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition. Il est donc très facile de savoir si une fonction est convexe ou concave en regardant le signe de sa dérivée seconde.

Exemple. Étudions la convexité de la fonction sinus sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^2$ sur cet intervalle, et :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (\sin)''(x) = -\sin(x).$$

Notons que $-\sin(x) \leq 0$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et $-\sin(x) \geq 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. La fonction sin est donc concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et elle est convexe sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Elle change ainsi de concavité en $(0, 0)$: on parle de point d'inflexion de la courbe.



La courbe représentative du sinus change de concavité en O :
elle est convexe sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ (arc représenté en rouge) et concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (arc en bleu).

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et $a \in I$. On dit que $(a, f(a))$ est un *point d'inflexion* de la courbe représentative de f si f'' s'annule au point a en changeant de signe.

Remarque : Un point d'inflexion est donc un point où la courbe représentative de la fonction change de concavité.
Rappelons finalement la définition suivante :

Définition.

Point critique. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $a \in I$. On dit que a est un *point critique* de f si $f'(a) = 0$.

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3 (Minimum global d'une fonction convexe)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle ouvert I. Si $x_0 \in I$ est un point critique de f (c'est-à-dire $f'(x_0) = 0$), alors f admet un minimum global en x_0.

Preuve.

□