Formulaire

Polynômes

Disclaimer : ces fiches ne remplacent pas la connaissance du cours vu en ECG1. Ce sont des synthèses à utiliser comme outil de révision.

1 Unicité des coefficients

Propriété 1 (Unicité de l'écriture d'un polynôme)

- Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme. Alors :
$$P = 0_{\mathbb{R}[x]} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$
- Tout polynôme $P \neq 0_{\mathbb{R}[x]}$ s'écrit de manière unique $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$. La suite $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est appelée *suite des coefficients de* P.

2 Degré d'un polynôme

Propriété 2 (du degré d'un polynôme)

Soient P et Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
  Si de plus $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$. En particulier, $\deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)$.
- Si $\deg(Q) \geq 1$, $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.
- Si $\deg(P) \geq 1$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$. Si P est constant, $P' = 0$.

Du fait que le degré du polynôme nul vaut $-\infty$, on tire le corollaire suivant :

Corollaire 3 (Intégrité)

Soient P et Q deux polynômes. Alors :
$$P \times Q = 0_{\mathbb{R}[x]} \quad \Leftrightarrow \quad P = 0_{\mathbb{R}[x]} \text{ ou } Q = 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

3 Division euclidienne

Théorème 4 (*de la division euclidienne*)

Soient A, B deux polynômes, avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R, \\ \deg(R) < \deg(B). \end{cases}$$

Q et R sont appelés le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de A par B.

4 Racines et factorisation d'un polynôme

Définition.

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est une *racine* de P si $P(a) = 0$.

Propriété 5 (Caractérisation d'une racine)

Soient P un polynôme de degré n et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$a \text{ est une racine de } P \quad \Leftrightarrow \quad (x - a) \text{ divise } P.$$

Théorème 6 (Nombre de racines distinctes)

- Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes.
- Un polynôme de degré au plus n admettant au moins $n + 1$ racines distinctes est le polynôme nul.

Théorème 7 (Ordre de multiplicité d'une racine)

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On a l'équivalence entre :

(1) $\exists Q \in \mathbb{R}[x]$, $P = (x - a)^r Q$ et $Q(a) \neq 0$;

(2) $(x - a)^r$ divise P et $(x - a)^{r+1}$ ne divise pas P ;

(3) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(r-1)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.

Si l'une de ces conditions est satisfaite, on dit que a *est racine de* P *de multiplicité* r *exactement.*

Théorème 8 (Nombre de racines comptées avec multiplicité)

- Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité.
- Un polynôme de degré n admettant au moins $n+1$ racines comptées avec leurs ordres de multiplicité est le polynôme nul.

Propriété 9 (Relation coefficients-racines pour un polynôme de degré 2)

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$). On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ le *discriminant* de P. Supposons $\Delta \geq 0$, et notons x_1 et x_2 les racines, distinctes ou non, de P. On dispose des égalités suivantes :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Théorème 10 (Factorisation d'un polynôme à coefficients réels)

Tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ peut s'écrire comme produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 et de polynômes à coefficients réels de degré 2 à discriminant strictement négatif.