Formulaire

# Sommes et séries

Disclaimer : ces fiches ne remplacent pas la connaissance du cours vu en ECG1/ECG2. Ce sont des synthèses à utiliser comme outil de révision.

## 1 Sommes usuelles

### 1.1 Formule du binôme

**Définition.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. On appelle **factorielle** $n$, et on note $n!$, l'entier défini par $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

On pose alors :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0, n]\!], \\ 0 & \text{si } p > n \text{ ou } p < 0. \end{cases}$$

$\binom{n}{p}$ est le **coefficient binomial** et se lit « p parmi n ».

**Propriété 1** (Relations sur les coefficients binomiaux)

Soit $n$ un entier naturel non nul.

(1) Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (symétrie des coefficients binomiaux).

(2) Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $p \cdot \binom{n}{p} = n \cdot \binom{n-1}{p-1}$.

(3) Pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ (formule du *triangle de Pascal*).

**Théorème 2** (*Formule du binôme de Newton* (1642 - 1727))

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels et $n$ un entier naturel. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

### 1.2 Autres sommes usuelles

| Sommes usuelles | |
|---|---|
| Somme d'entiers consécutifs | $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad$ $\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$ |
| Somme des premiers carrés | $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ |
| Somme des premiers cubes | $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ |
| Sommes géométriques | $\forall q \in \mathbb{R}, \sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} (n-m+1) & \text{si } q = 1, \\ \frac{q^{n+1}-q^m}{q-1} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$ |

**Propriété 3**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a$ et $b$ des réels. Alors :

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right).$$

## 2 Séries

Dans cette section, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels.

### 2.1 Généralités

**Définition.**

- On appelle **série de terme général** $u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou encore $\sum u_n$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est appelé **la somme partielle d'ordre** $n$ ou **$n$-ème somme partielle**.
- On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{R}$, et on appelle alors **somme de la série** le réel $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$, qu'on note $S$ ou $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
  Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u_n$ est **divergente**.

**Remarques.**

- Attention aux notations !

| $\sum_{k=0}^{n} u_k$ | $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$ | $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ |
|---|---|---|
| Somme partielle d'indice $n$ | Série de terme général $u_n$ : la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ | Somme de la série (si **convergence**) : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_k$ |

- La **nature** d'une série (convergente ou divergente) ne dépend pas :
  - de l'indice de départ : étant donné $n_0 \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.
  - des constantes multiplicatives : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.

**Définition.**

On suppose que la série $\sum u_n$ **converge**.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle **reste partiel d'ordre** $n$ le nombre : $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

**Remarque.** Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors $\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} S - S_n = 0$.

**Propriété 4** (Opérations sur les séries)

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **convergentes** et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

**Mise en garde.**

Il est possible que la série $\sum(u_n + v_n)$ converge alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent (par exemple dans le cas où $u_n = 1$ et $v_n = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

**Pour scinder une somme en deux, on vérifiera au préalable que les deux séries convergent.**

**Propriété 5** (Télescopage)

La série $\sum(u_n - u_{n+1})$ converge si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

## 2.2 Condition nécessaire de convergence

**Propriété 6** (Condition nécessaire de convergence)

Pour que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, **il faut que** $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$.
Mais **ce n'est pas suffisant !**

**Remarque.** Par contraposition, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série diverge. On dit dans ce cas que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

## 2.3 Séries de référence

| Séries usuelles | | Cas de convergence | Somme dans ce cas |
|---|---|---|---|
| Séries de Riemann | $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ | $\alpha > 1$ | |
| Séries géométriques | $\sum_{k\geq 0} q^k$, $q \in \mathbb{R}$ | $\lvert q\rvert < 1$ | $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ |
| Séries géométriques dérivées d'ordre 1 | $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$ | $\lvert q\rvert < 1$ | $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ |
| Séries géométriques dérivées d'ordre 2 | $\sum_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ | $\lvert q\rvert < 1$ | $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$ |
| Séries exponentielles | $\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$ | quelque soit $x \in \mathbb{R}$ | $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ |

**Le saviez-vous ?**

Pour $\alpha > 1$ quelconque, on ne connait pas en général la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Un problème célèbre, appelé *problème de Bâle*, est justement de calculer cette valeur lorsque $\alpha = 2$. Posé par Pietro Mengoli en 1644, ce problème résista aux attaques des mathématiciens éminents de l'époque. C'est le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 - 1783) qui en découvrit la valeur[a] en 1735 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On a obtenu depuis des formules pour $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha$ est un entier pair. Mais si $\alpha$ est un entier impair, ou n'est pas entier, on ne sait (presque) rien dire, et il s'agit d'un sujet de recherche actif.



*Leonhard Euler* (1707 - 1783)

[a] Une preuve de cette surprenante formule se trouve dans le problème 2 du sujet d'EM Lyon 2005.

## 2.4 Séries à termes positifs

**Propriété 7**

Soit $\sum u_n$ une série **à termes positifs**. Alors la suite des sommes partielles $(S_n)$ est croissante, et :

- si $(S_n)$ est majorée, $\sum u_n$ converge ;
- si $(S_n)$ n'est pas majorée, $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$.

| Comparaison par | Hypothèses | Conclusion |
|---|---|---|
| *Équivalent* | • $u_k \underset{+\infty}{\sim} v_k$<br>• $v_k \geq 0$ (ou $u_k \geq 0$) à partir d'un certain rang<br>• $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge (respectivement diverge) | $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge (resp. diverge) |
| *Négligeabilité « petit o »* | • $u_k = \underset{+\infty}{o}(v_k)$<br>• $v_k \geq 0$ à partir d'un certain rang<br>• $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge | $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge |
| | • $u_k = \underset{+\infty}{o}(v_k)$<br>• $v_k \geq 0$ à partir d'un certain rang<br>• $\sum_{k\geq 0} u_k$ diverge | $\sum_{k\geq 0} v_k$ diverge |
| *Inégalité* | • $u_k \leq v_k$ à partir d'un certain rang<br>• $u_k \geq 0$ à partir d'un certain rang<br>• $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge | $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge |
| | • $u_k \leq v_k$ à partir d'un certain rang<br>• $u_k \geq 0$ à partir d'un certain rang<br>• $\sum_{k\geq 0} u_k$ diverge | $\sum_{k\geq 0} v_k$ diverge |

**Mise en garde.**

Dans le cas de l'équivalence, **on n'a pas équivalence ou égalité des sommes!**

## 2.5 Séries absolument convergentes

**Définition.**

On dit qu'une série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

**Propriété 8** (Condition suffisante de convergence)

**Si** la série $\sum u_n$ converge absolument, **alors** elle converge. Et dans ce cas :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|. \qquad (\textit{inégalité triangulaire généralisée}).$$

**Propriété 9**

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série **absolument convergente**. Alors pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, la série $\sum u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$