Formulaire

Formules de Taylor et développements limités

Disclaimer : ces fiches ne remplacent pas la connaissance du cours vu en ECG1. Ce sont des synthèses à utiliser comme outil de révision.

1 Formules de Taylor

Théorème 1 (*Formules de Taylor* (1685 - 1731))

Soit I un intervalle et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, et soit $(a, x) \in I^2$.

- *Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.*
  - Hypothèses : f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.
  - Conclusion :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t}$$

- *Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n.*
  - Hypothèses : f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $|f^{(n+1)}|$ est majorée par un réel M sur I.
  - Conclusion :

$$\boxed{\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}}$$

- *Formule de Taylor-Young à l'ordre n.*
  - Hypothèses : f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
  - Conclusion :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)}$$

2 DL et dérivation

Propriété 2 (Dérivabilité et développement limité)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- f est dérivable en a **si, et seulement si,** f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, et ce développement limité est alors nécessairement :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a).$$

- **Si** f est classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, **alors** f admet un développement limité à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ et en tout point $a \in I$. De plus :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

3 Développements limités usuels

Théorème 3 (Développements limités classiques au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Astuce.

Voici quelques méthodes pour retenir, retrouver ou contrôler ces formules de développements limités.

- Les DL des fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ s'obtiennent par la formule de Taylor-Young. On retiendra :
  - la présence des factoriels au dénominateur (qui apparaissent déjà dans la formule de Taylor-Young) ;
  - cos (resp. sin) étant une fonction paire (resp. impaire), il n'y a que des termes pairs (resp. impairs) dans son DL. Attention à ne pas oublier l'alternance des signes !
- Le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ se retrouve à partir de la somme des termes d'une suite géométrique comme expliqué plus haut.

  Le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ s'obtient en remplaçant x par $-x$ dans le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.
- Le DL de $x \mapsto \ln(1-x)$ s'obtient en primitivant[a] celui de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. On retiendra en particulier :
  - les facteurs $\dfrac{1}{k}$ dus à l'intégration de x^{k-1} ;
  - les signes $-$ dus à l'intégration de $\dfrac{1}{1-x}$ en $-\ln(1-x)$.

  On obtient le DL de $x \mapsto \ln(1+x)$ en remplaçant x par $-x$ dans le DL de $x \mapsto \ln(1-x)$.
- Le DL de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ se déduit de la formule de Taylor-Young, et est à apprendre par coeur. Il permet notamment d'obtenir les DL de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ (avec $\alpha = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$).

Lors de la recherche du $DL(a)$ d'une fonction f dérivable, on contrôlera enfin ses deux premiers termes a_0 et a_1 en notant que :

$$a_0 = f(a) \quad \text{et} \quad a_1 = f'(a).$$

[a] Aucun théorème du cours ne permet de justifier qu'on a bien droit de le faire. C'est en fait possible, mais hors programme. On y pensera simplement comme un moyen mnémotechnique pour retenir ce DL.