Révisions de lycée - Corrigé

1 Quelques calculs pour s'échauffer !

Exercice 1

1. Développer et réduire : $(x+3)(2x-7)(3x-2)-(2x+6)(3x^2-7x+7)$
2. Factoriser et réduire :
   a) $(2x+7)(x-1)+(3x-2)(x-1)$
   b) $(2x+1)(x-1)-3x+3$
   c) $4x^2-49$
   d) $(4x-16)(x-2)-3x^2+12x$
   e) $4x^2-20x+25$
   f) $9x^2-12x+4+(2-3x)(4x+1)$
3. Résoudre les équations :
   a) $(x+3)(2x-7)-(x+3)(x-2)=x-5$
   b) $(x+3)(3x+7)=2x^2+12x+18-x-1$

Correction :

1. On commence ici par factoriser par $x+3$, afin de simplifier au plus les calculs. On a donc :
$$(x+3)\left((2x-7)(3-2)-2(3x^2-7x+7)\right)=(x+3)(9x)=\boxed{9x^2+27x}$$

2. a) $(2x+7)(x-1)+(3x-2)(x-1)=(x-1)(5x+5)=\boxed{5(x-1)(x+1)}$

   b) $(2x+1)(x-1)-3x+3=(x-1)(2x+1-3)=(x-1)(2x-2)=\boxed{2(x-1)^2}$

   c) $4x^2-49=\boxed{(2x-7)(2x+7)}$ Identité remarquable.

   d) $(4x-16)(x-2)-3x^2+12x=4(x-4)(x-2)-3x(x-4)=(x-4)(4x-8-3x)=\boxed{(x-4)(x-8)}$

   e) $4x^2-20x+25=\boxed{(2x-5)^2}$ Identité remarquable.

   f) $9x^2-12x+4+(2-3x)(4x+1)=(2-3x)^2+(2-3x)(4x+1)=\boxed{(2-3x)(x+3)}$

3. a)
$$\begin{aligned}&(x+3)(2x-7)-(x+3)(x-2)=x-5\\ \iff&(x+3)(2x-7-(x-2))=x-5\\ \iff&(x+3)(x-5)=x-5\\ \iff&(x-5)(x+3-1)=0\\ \iff&(x-5)(x+2)=0\\ \iff&\boxed{\begin{cases}x=5\\ \text{ou } x=-2\end{cases}}\end{aligned}$$

   b)
$$\begin{aligned}&(x+3)(3x+7)=2x^2+12x+18-x-1\\ \iff&(x+3)(3x+7)=2(x^2+6x+9)-x-1\\ \iff&(x+3)(3x+7)=2(x+3)^2-x-1\\ \iff&(x+3)(3x+7-2(x+3))=-x-1\\ \iff&(x+3)(3x+7-2x-6)=-x-1\\ \iff&(x+3)(x+1)=-x-1\\ \iff&(x+1)(x+3+1)=0\\ \iff&(x+1)(x+4)=0\\ \iff&\boxed{\begin{cases}x=-1\\ \text{ou } x=-4\end{cases}}\end{aligned}$$

Exercice 2 Simplifier au maximum les expressions suivantes :

Niveau débutant : $\frac{5^{n+1}(7n+1)}{7^{n+1}} - \frac{5^n(5n+2)}{7^n}$

Niveau confirmé : $\frac{11^{2n+1}(11n+1)}{8^{n+1}} - \frac{121^{n+1}(2n-5)}{2^{3n+4}}$

Niveau expert : $\frac{22^{2n+3}(7n-6)}{14^{2n+1}} - \frac{121^{n+1}(44n-32)}{49^n}$

Correction :

1. On utilise $5^{n+1} = 5^n \times 5$ et $7^{n+1} = 7^n \times 7$. On obtient :

$$\frac{5^n}{7^{n+1}}(5(7n+1) - 7(5n+2)) = \boxed{\frac{-9 \times 5^n}{7^{n+1}}}$$

2. On utilise $121^{n+1} = (11^2)^{n+1} = 11^{2n+2}$ et $8^{n+1} = (2^3)^{n+1} = 2^{3n+3}$. On obtient :

$$\boxed{\frac{57 \times 11^{2n+1}}{2^{3n+4}}}$$

3. On utilise :
   — $22^{2n+3} = (11 \times 2)^{2n+3} = 11^{2n+3}2^{2n+3}$ et de même, $14^{2n+1} = 2^{2n+1}7^{2n+1}$;
   — comme déjà vu $121^{n+1} = 11^{2n+2}$ et $49^n = 7^{2n}$;
   — $\frac{2^{2n+3}}{2^{2n+1}} = 2^2$.
   On obtient :

$$\frac{11^{2n+3}2^{2n+3}(7n-6)}{2^{2n+1}7^{2n+1}} - \frac{11^{2n+2}4(11n-8)}{7^{2n}} = \frac{2^2 11^{n+2}}{7^{2n+1}}(11(7n-6) - 7(11n-8) = \boxed{-\frac{40 \times 11^{n+2}}{7^{2n+1}}}$$

Exercice 3 Résoudre les inéquations suivantes :

$$(3x-1)(x+2) < 9x^2 - 1$$

et

$$\frac{4x^2+20x+25}{49x^2-36} \geq \frac{4x+10}{7x+6}.$$

Correction :

1.

$$\begin{aligned} &(3x-1)(x+2) < 9x^2 - 1 \\ \iff &(3x-1)(x+2) - (3x-1)(3x+1) < 0 \\ \iff &(3x-1)(-2x+1) < 0 \end{aligned}$$

Le tableau de signes est le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$-2x+1$		$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	
$(3x-1)(-2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\boxed{3(x-1)(x+2) < 9x^2 - 1 \iff x \in]-\infty; \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[.}$

2.

$$\begin{aligned}
&\frac{4x^2+20x+25}{49x^2-36} \geq \frac{4x+10}{7x+6}\\
\iff &\frac{(2x+5)^2}{(7x-6)(7x+6)} - \frac{2(2x+5)}{7x+6} \geq 0\\
\iff &\frac{(2x+5)^2 - 2(2x+5)(7x-6)}{(7x-6)(7x+6)} \geq 0\\
\iff &\frac{(2x+5)(2x+5-2(7x-6))}{(7x-6)(7x+6)} \geq 0\\
\iff &\frac{(2x+5)(-12x+17)}{(7x-6)(7x+6)} \geq 0
\end{aligned}$$

Le tableau de signes est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{6}{7}$		$\frac{6}{7}$		$\frac{17}{12}$		$+\infty$
$2x+5$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	
$-12x+17$		$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	
$7x-6$		$-$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$7x+6$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	
$\frac{(2x+5)(-12x+17)}{(7x-6)(7x+6)}$		$-$	0	$+$	ND	$-$	ND	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\boxed{\frac{4x^2+20x+25}{49x^2-36} \geq \frac{4x+10}{7x+6} \iff x \in [-\frac{5}{2}; -\frac{6}{7}[\cup]\frac{6}{7}; \frac{17}{12}].}$

Exercice 4 Pierre a reçu un jeu de construction constitué de n cubes en bois de taille identique. Il les pose tous sur le sol, puis cherche à les ranger sous la forme d'un carré. Malheureusement, il lui manque 5 cubes pour compléter son carré avec sa première méthode. Il tente alors de faire un carré plus petit, mais se retrouve alors avec 14 cubes en trop.
Déterminez le nombre de cubes dans son jeu de construction.

Correction : Notons n le nombre de cubes du jeu. On a alors deux informations : $\exists a \in \mathbb{N}, n = a^2 - 5$ et $\exists b \in \mathbb{N}, n = b^2 + 14$. On résout alors :

$$a^2 - 5 = b^2 + 14 \iff a^2 - b^2 = 19 \iff (a+b)(a-b) = 19 \times 1.$$

Ici 19 et 1 sont les seuls diviseurs entiers positifs de 19. On récupère puis résout le système :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a+b &= 19 \quad L_1 \\ a-b &= 1 \quad L_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} a+b &= 19 \quad L_1 \\ a-b-(a+b) &= 1-19 \quad L_2 - L_1 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a+b &= 19 \quad L_1 \\ b &= 9 \quad L_2 - L_1 \end{cases}\\
&\iff \boxed{\begin{cases} a &= 10 \quad L_1 \\ b &= 9 \quad L_2 - L_1 \end{cases}}
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{n = 10^2 - 5 = 95}$

2 Récurrence.

Exercice 5 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Corrigé : *Initialisation :* Pour $n = 1$, on a $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ ce qui est la formule annoncée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $1+2+\cdots+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a :

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= (1+2+\cdots+n)+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \\ &\boxed{= \frac{(n+1)(n+2)}{2}} \end{aligned}$$

Conclusion : Par application du principe de récurrence, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

À vous de jouer maintenant !

Exercice 6

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (Vous pouvez apprendre cette formule, elle est parfois utile !)
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3. **Plus difficile.** Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$$

Correction :

1. *Initialisation :* Pour $n = 1$, on a $1^2 = 1 = \dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}$ ce qui est la formule annoncée.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. On a :

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= (1^2+2^2+\cdots+n^2)+(n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(n+1)}{6}(n(2n+1)+6(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)}{6}(2n^2+n+6n+6) \\ &= \frac{(n+1)}{6}(2n^2+7n+6) \end{aligned}$$

   D'autre part, on a :

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$$

   D'où :

$$\boxed{1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$$

   Conclusion : Par application du principe de récurrence, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

2. *Initialisation :* Pour $n = 1$, on a $1^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ ce qui est la formule annoncée.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et montrons que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$. On a :

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 \\
&\boxed{= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

   Conclusion : Par application du principe de récurrence, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.}$$

3. *Initialisation :* Pour $n = 1$, on a $1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$ ce qui est la formule annoncée.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ et montrons que $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. On a :

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2} \\
&= 2 - \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)^2} \\
&\leq 2 - \frac{n^2 + n}{n(n+1)^2} \\
&\boxed{= 2 - \frac{1}{n+1}}
\end{aligned}$$

   Conclusion : Par application du principe de récurrence, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.}$$

3 Ensemble de définition de fonctions.

Ces questions ont été ou seront corrigées en classe.

Exercice 7 Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes. On justifiera soigneusement la réponse.

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2+3x+2}$
3. $f_3 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}}$
5. $f_5 : x \mapsto \ln(\sin(x)+2)$
6. $f_6 : x \mapsto \sqrt{\ln(9x^2-25)}$

Corrigé :

1. $f_1 = g \circ h$ avec $g : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et $h : x \mapsto x^2-4$ définie sur $\mathbb{R}$.
On résout donc :
$$h(x) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$$
et on a donc $\boxed{f_1 \text{ définie sur }]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[.}$
2. $f_2 = \dfrac{g}{h}$ avec $g : x \mapsto x^2+1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $h : x \mapsto x^2+3x+2$ définie sur $\mathbb{R}$. On résout donc :
$$h(x) \neq 0 \Leftrightarrow x^2+3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq -2$$
et on a donc $\boxed{f_2 \text{ définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}.}$
3. $f_3 = g \circ h$ avec $g : x \mapsto \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $h : x \mapsto \dfrac{2+x}{3-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. On résout donc :
$$h(x) \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \frac{2+x}{3-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-2;3[$$
(je vous laisse faire le tableau de signes) et on a donc $\boxed{f_3 \text{ définie sur }]-2;3[.}$
4. $f_4 = g \circ h$ avec $g : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et $h : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1,-4\}$. On résout donc :
$$h(x) \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2+3x-4} \geq 0$$
Le tableau de signes est le suivant :

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}$		$+$	ND	$-$	ND	$+$		$+$	

Ainsi, $h(x) \in \mathbb{R}^+$ pour $x \in]-\infty;-4[\cup]1;+\infty[$. On a donc
$$\boxed{f_4 \text{ définie sur }]-\infty;-4[\cup]-1;+\infty[.}$$
5. $f_5 = g \circ h$ avec $g : x \mapsto \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $h : x \mapsto \sin(x)+2$ définie sur $\mathbb{R}$. On résout donc :
$$h(x) \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \sin(x)+2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$
et on a donc $\boxed{f_5 \text{ définie sur } \mathbb{R}.}$
6. $f_6 = g \circ h \circ i$ avec $g : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$, $h : x \mapsto \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $i : x \mapsto 9x^2-25$ définie sur $\mathbb{R}$.
On résout donc :
$$i(x) \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow 9x^2-25 > 0 \Leftrightarrow (3x-5)(3x+5) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-\frac{5}{3}[\cup]\frac{5}{3};+\infty[$$

puis

$$\begin{aligned} h(i(x)) \in \mathbb{R}^+ &\Leftrightarrow \ln(9x^2-25) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 9x^2-25 \geq 1 \text{ car la fonction logarithme est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow 9x^2 \geq 26 \\ &\Leftrightarrow |x| \geq \frac{\sqrt{26}}{3} \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty; -\frac{\sqrt{26}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{26}}{3}; +\infty[\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{26} > 5$, on a donc $\boxed{f_6 \text{ définie sur }]-\infty; -\frac{\sqrt{26}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{26}}{3}; +\infty[.}$

4 Système d'équations.

Exercice 8 Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 3x+y-8 &= 0 \\ 2x-2y &= 24 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -3x+y+z+\frac{3}{4} &= 0 \\ 2x+3y-z+3 &= 1 \\ 2x+5y+2z &= 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ x+2y+z &= 1 \\ 2x+y+z &= 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2z &= 1 \\ -y+z &= 2 \\ x-2y &= 1 \end{cases}$

Corrigé :

1.

$$\begin{cases} 3x+y-8 &= 0 \\ 2x-2y &= 24 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+y &= 8 & L_1 \\ 2x-2y+(6x+2y) &= 24+2\times 8 & L_2+2L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x+y &= 8 & L_1 \\ 8x &= 40 & L_2 \end{cases}$$
$$\iff \boxed{\begin{cases} x &= 5 & L_2 \\ y &= -7 & L_1 \end{cases}}$$

On vérifie **toujours** que les solutions trouvées fonctionnent avec le système initial, les erreurs de calcul sont trop fréquentes pour s'en passer. Ici c'est le cas.

2.

$$\begin{cases} -3x+y+z = -\frac{3}{4} & L_1 \\ 2x+3y-z = -2 & L_2 \\ 2x+5y+2z = 3 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x+y+z = -\frac{3}{4} & L_1 \\ -x+4y = -\frac{11}{4} & L_2+L_1 \\ 8x+3y = \frac{9}{2} & L_3-2L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -3x+y+z = -\frac{3}{4} & L_1 \\ -x+4y = -\frac{11}{4} & L_2 \\ 35y = -\frac{35}{2} & L_3+8L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z = 2 & L_1 \\ x = \frac{3}{4} & L_2 \\ y = -\frac{1}{2} & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} & L_2 \\ y = -\dfrac{1}{2} & L_3 \\ z = 2 & L_1 \end{cases}}$$

On vérifie que nos solutions sont bien solutions du système initial : c'est le cas.

3.

$$\begin{cases} x+y+2z=3 & L_1 \\ x+2y+z=1 & L_2 \\ 2x+y+z=0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+2z=3 & L_1 \\ y-z=-2 & L_2-L_1 \\ -y-3z=-6 & L_3-2L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x+y+2z=3 & L_1 \\ y-z=-2 & L_2 \\ -4z=-8 & L_3+L_2 \end{cases}$$
$$\iff \boxed{\begin{cases} x=-1 & L_1 \\ y=0 & L_2 \\ z=2 & L_3 \end{cases}}$$

On vérifie que nos solutions sont bien solutions du système initial : c'est le cas.

4.

$$\begin{cases} x+2z=1 & L_1 \\ -y+z=2 & L_2 \\ x-2y=1 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2z=1 & L_1 \\ -y+z=2 & L_2 \\ -2y-2z=0 & L_3-L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x+2z=1 & L_1 \\ -y+y=2 & L_2 \\ z=y & L_3-2L_2 \end{cases}$$

On constate alors que notre système n'admet pas de solutions. En effet, la deuxième équation revient à $0=2$, ce qui est absurde. On dit que le système est **incompatible**.

Exercice 9 Un groupe de 15 amis décide d'aller passer ses vacances, en partant de Genève, à Rome. Pour y aller, huit d'entre eux préfèrent prendre l'avion et les autres, plus écolos, prennent le train. Collectivement, leur aller représente 374kg de CO2 émis.
Suivant l'exemple plus vertueux de leurs camarades, quatre de plus rentrent en train. Collectivement, le retour représente 202kg de CO2 émis. Combien de CO2 émet un trajet en avion (par passager) ? En train ?

Correction : On commence par mettre le problème en équation. On pose a le nombre de kilos émis par le voyage en avion et t le nombre de kilos émis par le voyage en train. Le problème se ramène à la réslution suivante :

$$\begin{cases} 8a+7t & = 374 & L_1 \\ 4a+11b & = 202 & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a+11b & = 202 & L_2 \\ 8a+7b-(4a+11b) & = 374-2\times 202 & L_1-2L_2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a & = \dfrac{202-11\times 2}{4} = \dfrac{180}{4} = 45 \\ -15b & = -30 \iff b=2 \end{cases}$$
$$\iff \boxed{\begin{cases} a & = 45 & L_1 \\ b & = 2 & L_2-L_1 \end{cases}}$$

Je précise que ces chiffres sont proches de la réalité (c'était ceux de l'ADEME, l'agence de la transition écologique, quand j'ai écrit cet exercice il y a 3 ans).

Exercice 10 (Plus difficile) Déterminer tous les triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P(x) = ax^2+bx+c$ vérifie :

1. $P(-1)=5$, $P(1)=1$ et $P(2)=2$;
2. $P(-1)=4$ et $P(2)=1$.

Correction :

1. On a :
$$P(-1) = 5 \iff a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = 5.$$
De même pour les deux autres équations. On récupère donc le système :
$$\begin{cases} a-b+c & = 5 & L_1 \\ a+b+c & = 1 & L_2 \\ 4a+2b+c & = 2 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} a-b+c & = 5 & L_1 \\ 2b & = 1-5 & L_2 - L_1 \\ 6b-3c & = 2-20 & L_3 - 4L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a & = 5+b-c & L_1 \\ b & = -2 & L_2 \\ c & = 18+6b & L_3 - 4L_1 \end{cases}$$
$$\iff \boxed{\begin{cases} a & = 1 & L_1 \\ b & = -2 & L_2 \\ c & = 2 & L_3 - 4L_1 \end{cases}}$$
et notre polynôme recherché est
$$\boxed{P(x) = x^2 - 2x + 2.}$$

2. Même raisonnement, ici avec le système
$$\begin{cases} a-b+c & = 4 & L_1 \\ 4a+2b+c & = 1 & L_2 \end{cases}$$
Nous ferons ce calcul en classe dans un prochain chapitre !