ECG1

DM de la semaine du 23/09.

J'attends de vous une copie par groupe de colle, chacun d'entre vous doit avoir rédigé l'un des trois exercices, mais le travail est collectif : vous devez tous les trois avoir compris comment faire tous les exercices.

Exercice 1 Cet exercice est à faire en plus, je veux que la personne la moins à l'aise en calcul (de son avis) du groupe s'en charge.
Simplifier l'expression suivante:

$$\frac{15^{2n+3}(35n-6)}{21^{2n+1}} - \frac{25^{n+2}(9n-2)}{49^n}$$

Résoudre les inéquations suivantes:

$$(4x-3)(x+5) < 16x^2 - 9$$

et

$$\frac{9x^2+30x+25}{36x^2-49} \geq \frac{3x+5}{6x-7}.$$

Exercice 2 L'objectif de cet exercice est de calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Justifiez que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on a l'égalité : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
3. Démontrez enfin que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Exercice 3 (Ensembles de définition)
Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes. On justifiera soigneusement la réponse.

1. $f_2 : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+3x+2}$
2. $f_3 : x \mapsto \ln\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$
3. $f_4 : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+3x-4}}$
4. $f_5 : x \mapsto \ln(\sin(x)+2)$

Exercice 4 (Fonctions injectives, surjectives)

1. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
   Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.
2. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
   Montrer que f et g sont bijectives