ECG1

DM de la semaine du 23/09.

J'attends de vous une copie par groupe de colle, chacun d'entre vous doit avoir rédigé l'un des trois exercices, mais le travail est collectif : vous devez tous les trois avoir compris comment faire tous les exercices.

Exercice 1 Cet exercice est à faire en plus, je veux que la personne la moins à l'aise en calcul (de son avis) du groupe s'en charge.
Simplifier l'expression suivante:

$$\frac{15^{2n+3}(35n-6)}{21^{2n+1}} - \frac{25^{n+2}(9n-2)}{49^n}$$

Résoudre les inéquations suivantes:

$$(4x-3)(x+5) < 16x^2 - 9$$

et

$$\frac{9x^2+30x+25}{36x^2-49} \geq \frac{3x+5}{6x-7}.$$

Correction :
Simplification des expressions : Simplification de l'expression :

$$\begin{aligned}
\frac{15^{2n+3}(35n-6)}{21^{2n+1}} - \frac{25^{n+2}(9n-2)}{49^n} &= \frac{(3\cdot 5)^{2n+3}(35n-6)}{(3\cdot 7)^{2n+1}} - \frac{(5^2)^{n+2}(9n-2)}{(7^2)^n} \\
&= \frac{3^{2n+3}5^{2n+3}(35n-6)}{3^{2n+1}7^{2n+1}} - \frac{5^{2n+4}(9n-2)}{7^{2n}} \\
&= 9\,\frac{5^{2n+3}(35n-6)}{7^{2n+1}} - 5\,\frac{5^{2n+3}(9n-2)}{7^{2n}} \\
&= \frac{5^{2n+3}}{7^{2n+1}}(9(35n-6) - 5(9n-2)\cdot 7) \\
&= \frac{5^{2n+3}}{7^{2n+1}}(315n - 54 - 315n + 70) \\
&= \boxed{\frac{5^{2n+3}}{7^{2n+1}} \times 16}
\end{aligned}$$

Première inéquation :

$$\begin{aligned}
(4x-3)(x+5) < 16x^2 - 9 &\iff (4x-3)(x+5) < (4x-3)(4x+3) \\
&\iff (4x-3)\big((x+5) - (4x+3)\big) < 0 \\
&\iff (4x-3)(-3x+2) < 0 \\
&\iff (4x-3)(3x-2) > 0
\end{aligned}$$

On étudie le signe de $(4x-3)(3x-2)$:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$4x-3$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$3x-2$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$(4x-3)(3x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{(4x-3)(x+5) < 16x^2-9 \iff x \in]-\infty, \frac{2}{3}[\cup]\frac{3}{4}, +\infty[}$.

Deuxième inéquation :

$$\begin{aligned}\frac{9x^2+30x+25}{36x^2-49} \geq \frac{3x+5}{6x-7} &\iff \frac{(3x+5)^2}{(6x-7)(6x+7)} - \frac{3x+5}{6x-7} \geq 0\\ &\iff \frac{(3x+5)^2-(3x+5)(6x+7)}{(6x-7)(6x+7)} \geq 0\\ &\iff \frac{(3x+5)(3x+5-6x-7)}{(6x-7)(6x+7)} \geq 0\\ &\iff \frac{-(3x+5)(3x+2)}{(6x-7)(6x+7)} \geq 0\\ &\iff \frac{(3x+5)(3x+2)}{(6x-7)(6x+7)} \leq 0.\end{aligned}$$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$-\frac{7}{6}$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{7}{6}$		$+\infty$
$3x+5$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	
$3x+2$		$-$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$6x+7$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	
$6x-7$		$-$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$\frac{(3x+5)(3x+2)}{(6x-7)(6x+7)}$		$+$	0	$-$	ND	$+$	0	$-$	ND	$+$	

Ainsi $\boxed{\frac{9x^2+30x+25}{36x^2-49} \geq \frac{3x+5}{6x-7} \iff x \in \left[-\frac{5}{3}, -\frac{7}{6}\right[\cup \left[-\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right[}$ (on exclut $x = \pm\frac{7}{6}$ où l'expression n'est pas définie).

Exercice 2 L'objectif de cet exercice est de calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Justifiez que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on a l'égalité : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
3. Démontrez enfin que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Correction :

1. Justifions que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$:
   - Pour $k = 0$, nous avons $0\binom{n}{0} = 0$.
   - Donc, $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, on a l'égalité : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$:

$$\begin{aligned}k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\\ &= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}\\ &= n\binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

4. Montrons que $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = 2^{n-1}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} \quad \text{(en posant } i = k-1\text{)}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\\ &= 2^{n-1} \quad \text{(par la formule du binôme de Newton)}\end{aligned}$$

5. Démontrons enfin que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\\ &= n\cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

Exercice 3 (Ensembles de définition)
Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes. On justifiera soigneusement la réponse.

1. $f_2 : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+3x+2}$
2. $f_3 : x \mapsto \ln\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$
3. $f_4 : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+3x-4}}$
4. $f_5 : x \mapsto \ln(\sin(x)+2)$

Correction :

1. $f_2 : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+3x+2}$ On a : $f_2 = \frac{g}{h}$ avec $g : x \mapsto x^2+1, D_g = \mathbb{R}$ et $h : x \mapsto x^2+3x+2, D_h = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}h(x) \neq 0 &\iff x^2+3x+2 \neq 0\\ &\iff (x+1)(x+2) \neq 0\\ &\iff x \neq -1 \text{ et } x \neq -2\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{D_{f_2} = \mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}}$

2. $f_3 : x \mapsto \ln\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$
On a : $f_3 = g \circ h$ avec $g = \ln,\ D_g = \mathbb{R}_+^*$ et $h : x \mapsto \frac{2+x}{3-x}$, $D_h = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$h(x) \in D_g \iff h(x) > 0 \iff \frac{2+x}{3-x} > 0$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$3-x$		$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	
$\frac{2+x}{3-x}$		$-$	0	$+$	ND	$-$	

Donc $\boxed{D_{f_3} =]-2, 3[}$

3. $f_4 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}}$ On a : $f_4 = g \circ h(x)$ avec

$$g : x \mapsto \sqrt{x}, \quad D_g = \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+3x-4} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+4)}, \quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}.$$

$h(x) \in D_g \iff h(x) \geq 0 \iff \frac{x+1}{x+4} \geq 0$:

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	$\vdots$	$+$	
$\frac{x+1}{x+4}$		$+$	ND	$-$	0	$+$	ND	$+$	

On obtient $h(x) \geq 0$ pour $x \in]-\infty, -4[\cup [-1, 1[\cup]1, +\infty[$.
Donc $\boxed{D_{f_4} =]-\infty, -4[\cup [-1, 1[\cup]1, +\infty[}$.

4. $f_5 : x \mapsto \ln(\sin(x) + 2)$
On a : $f_5 = g \circ h$ avec $g = \ln$, $D_g = \mathbb{R}_+^*$ et $h : x \mapsto \sin(x) + 2$, $D_h = \mathbb{R}$.
$h(x) \in D_g \iff h(x) > 0 \iff \sin(x) + 2 > 0$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \in [-1, 1]$ donc $\sin(x) + 2 \in [1, 3]$.
Donc $\boxed{D_{f_5} = \mathbb{R}}$.

Exercice 4 (Fonctions injectives, surjectives)

1. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si, et seulement si, f est surjective.
2. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective.
Montrer que f et g sont bijectives

Correction :

1. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrons que f est injective si, et seulement si, f est surjective.

⇒ Supposons que f est injective c'est-à-dire : $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
Montrons que f est surjective, c'est-à-dire : $\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.
Soit $y \in E$. On a $f(f(f(y))) = f(y)$. Par l'injectivité de f, on a alors :

$$f(f(y)) = y.$$

En posant $x = f(y)$, on obtient :

$$f(x) = f(f(y)) = y.$$

Donc, pour chaque $y \in E$, il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est surjective.}}$

$\Leftarrow$ Supposons que f est surjective, c'est-à-dire : $\forall y \in E,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.
Montrons que f est injective, c'est-à-dire : $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.
Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
Comme f est surjective, il existe $z_1 \in E$ tel que $f(z_1) = x_1$ et $z_2 \in E$ tel que $f(z_2) = x_2$.
On a alors :

$$f(f(z_1)) = f(x_1) = f(x_2) = f(f(z_2)).$$

En appliquant encore f des deux côtés, on obtient :

$$x_1 = f(z_1) = f(f(f(z_1))) = f(f(f(z_2))) = f(z_2) = x_2.$$

Donc, $\boxed{f \text{ est injective.}}$

2. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrons que f et g sont bijectives.

- Montrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Appliquons g des deux côtés :

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

En appliquant f à nouveau, nous obtenons

$$f(g(f(x_1))) = f(g(f(x_2))).$$

Par l'injectivité de $f \circ g \circ f$, cela implique que

$$x_1 = x_2.$$

Donc, $\boxed{f \text{ est injective.}}$

- Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Nous devons montrer qu'il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Puisque $f \circ g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que :

$$y = f \circ g \circ f(x).$$

Donc, en posant $x' = g(f(x))$, on a bien

$$y = f(x').$$

Par la bijectivité de $f \circ g \circ f$, il existe un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est surjective.}}$
Donc, $\boxed{f \text{ est bijective.}}$

- Montrons que g est bijective.
Première version (plus simple) : Puisque f est bijective, elle admet une fonction inverse $f^{-1} : F \to E$.
On a alors :

$$g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}.$$

Ainsi, g est bijective comme composée de fonctions bijectives.
Deuxième version :

  - Montrons que g est injective. Soient $y_1, y_2 \in F$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Appliquons f des deux côtés :

$$f(g(y_1)) = f(g(y_2)).$$

De plus, comme f est surjective, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. En remplaçant, nous obtenons :

$$f(g(f(x_1))) = f(g(f(x_2))).$$

Par l'injectivité de $f \circ g \circ f$, cela implique que

$$x_1 = x_2.$$

Donc, $\boxed{g \text{ est injective.}}$

– Montrons que g est surjective. Soit $x \in E$. Nous devons montrer qu'il existe un $y \in F$ tel que $g(y) = x$.
Comme $f \circ g \circ f$ est surjective, il existe $z \in E$ tel que

$$f(g(f(z))) = f(x).$$

Comme f est injective, cela implique que

$$g(f(z)) = x.$$

En posant $y = f(z)$, on obtient :

$$g(y) = g(f(z)) = x.$$

Ainsi, $\boxed{g \text{ est surjective.}}$ Donc, $\boxed{g \text{ est bijective.}}$