ECG1

DM de la semaine du 30/09.

J'attends de vous une copie par groupe de colle, chacun d'entre vous doit avoir rédigé l'un des trois exercices, mais le travail est collectif : vous devez tous les trois avoir compris comment faire tous les exercices.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

2. Soient $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$. Comparer
$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} \text{ et } \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}.$$

3. Soit (x_n) une suite de réels. On pose
$$\forall k \in \mathbb{N}, y_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x_\ell$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$$

Exercice 2

1. Soient k et n deux entiers avec $0 < k \leq n$. Montrer que :
$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Exercice 3 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant
$$\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$$

Ce DM est nettement plus difficile que celui de la semaine passée. Si vous bloquez sur des exercices, en particulier le dernier, n'hésitez pas à me demander des pistes.