ECG1

DM de la semaine du 30/09.

J'attends de vous une copie par groupe de colle, chacun d'entre vous doit avoir rédigé l'un des trois exercices, mais le travail est collectif : vous devez tous les trois avoir compris comment faire tous les exercices.

Exercice 1 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

2. Soient $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$. Comparer

$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} \text{ et } \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}.$$

3. Soit (x_n) une suite de réels. On pose

$$\forall k \in \mathbb{N}, y_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x_\ell$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$$

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le binôme de Newton pour $(1-1)^n$, nous avons :

$$0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

Pour $n \geq 1$, nous avons :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0}$$

Pour $n = 0$, nous avons :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{0}{k} = 1}$$

2. Soient $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$. En utilisant la définition des coefficients binomiaux, nous avons :

$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} = \frac{n!}{\ell!(k-\ell)!(n-k)!}$$

et

$$\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell} = \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \cdot \frac{(n-\ell)!}{(k-\ell)!(n-k)!} = \frac{n!}{\ell!(k-\ell)!(n-k)!}$$

Donc,

$$\boxed{\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}y_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}x_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}x_\ell\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}x_\ell\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell} \quad \text{Question 2)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}x_\ell\binom{n}{\ell}\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-\ell}{k-\ell}\end{aligned}$$

En utilisant le binôme de Newton pour $(1-1)^{n-\ell}$, nous avons :

$$\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-\ell}{k-\ell} = (1-1)^{n-\ell} = 0 \quad \text{pour} \quad n \neq \ell$$

et

$$\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-\ell}{k-\ell} = 1 \quad \text{pour} \quad n = \ell$$

Donc,

$$\sum_{\ell=0}^{n}x_\ell\binom{n}{\ell}\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-\ell}{k-\ell} = x_n\binom{n}{n} = x_n$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}y_k}$$

Exercice 2 1. Soient k et n deux entiers avec $0 < k \leq n$. Montrer que :

$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Correction :

1. Soient k et n deux entiers avec $0 < k \leq n$. En utilisant la définition des coefficients binomiaux, nous avons :

$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{k}\cdot\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!}.$$

Et

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.}$$

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{1}{k} = \frac{(-1)^{1+1}}{1}\binom{1}{1} = 1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}.$$

La propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

et montrons que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) \quad \text{Triangle de Pascal} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}\end{aligned}$$

Pour le premier terme, utilisons le résultat de la première question (attention, il faut $k \leq n$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} + \frac{(-1)^{(n+1)+1}}{n+1}\binom{n}{(n+1)-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k} + \frac{(-1)^{(n+2)}}{n+1} \quad \text{Question 1)} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k} \quad \text{c'est le dernier terme de la somme} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k} - (-1)^1\binom{n+1}{0}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}(0^{n+1} - (-1)) \quad \text{Binôme de Newton} \\ &= \boxed{\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\binom{n}{n+1} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $\binom{n}{n+1} = 0$.

Conclusion : Par application du principe de récurrence, On a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$

Exercice 3 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$$

Ce DM est nettement plus difficile que celui de la semaine passée. Si vous bloquez sur des exercices, en particulier le dernier, n'hésitez pas à me demander des pistes.

Correction :
Soit f une fonction solution. Pour $x > 0$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est formée de réels strictement positifs et satisfait la relation de récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0$$

Les racines de l'équation caractéristique associée sont 2 et -3 de sorte qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu(-3)^n$$

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est formée que de réels strictement positifs, il est nécessaire que μ soit nul.
On en déduit alors : $u_0 = x = \lambda$ et $u_1 = f(x) = 2\lambda = 2x$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $\boxed{f(x) = 2x.}$
Inversement, cette fonction est bien solution. On vient donc de faire un raisonnement dit "Analyse-synthèse" qui permet de montrer que la seule fonction solution est $\boxed{f : x \mapsto 2x.}$