ECG1

DM de la semaine du 7/10.

J'attends de vous une copie par groupe de colle, chacun d'entre vous doit avoir rédigé l'un des trois exercices, mais le travail est collectif : vous devez tous les trois avoir compris comment faire tous les exercices.

Exercice 1 (Somme harmonique) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$

En déduire que :

$$\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty.$$

Exercice 2 Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$$

Montrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 3 (suites adjacentes)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}$$

1. **A faire après lundi, vous pouvez me rendre le DM sans si besoin** Proposer un programme en Python permettant de calculer S_n.
2. Montrer que les suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes.
3. En déduire qu'elles sont convergentes vers une limite ℓ comprise entre $\frac{5}{4}$ et $\frac{7}{4}$.
4. On admet que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$. Justifiez que $|S_n - \ell| \leq \frac{1}{n}$.
5. Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit qu'un nombre x est une approximation d'un nombre ℓ à 10^{-p} près si et seulement si $|x - \ell| \leq 10^{-p}$. Cela signifie en particulier que x et ℓ ont p décimales en commun.

   Par exemple, $3,14$ est une approximation à 10^{-2} près de π.

   (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la question 3, déterminez n tel que S_n est une approximation de $\frac{\pi^2}{6}$ à 10^{-p} près.

   (b) Calculez n pour $p = 10$. On considère que l'ordinateur met une milliseconde (soit $0,001s$) pour calculer 100 valeurs de S_n. Combien de temps (en unité compréhensible...[1]) lui faudra-t-il pour calculer les 10 premières décimales de $\frac{\pi^2}{6}$? Et si on en voulait 20 ?

[1] On rappelle qu'il faut 1000 millisecondes pour faire une seconde, qu'il y a 3600 secondes dans une heure, 24h dans une journée et 365 jours dans l'année