ECG1

DM de la semaine du 7/10.

J'attends de vous une copie par groupe de colle, chacun d'entre vous doit avoir rédigé l'un des trois exercices, mais le travail est collectif : vous devez tous les trois avoir compris comment faire tous les exercices.

Exercice 1 (Somme harmonique) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$

En déduire que :

$$\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

car pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $k \leq 2n$ donc $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a donc bien

$$\boxed{H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.}$$

Montrons que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0$$

donc la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
On sait alors que soit $\lim_{n\to\infty} H_n$ existe dans $\mathbb{R}$, soit $\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty$.
Par l'absurde, supposons que $\lim_{n\to\infty} H_n = \ell \in \mathbb{R}$. Alors, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\ell - \ell \geq \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde. On en déduit que

$$\boxed{H_n \to +\infty.}$$

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

D'une part

$$0 \leq u_{2n} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \to 0$$

D'autre part

$$0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{n(n+1)} \to 0$$

On en déduit, en utilisant le partitionnement pair/impair :

$$\boxed{u_n \to 0.}$$

Exercice 3 (suites adjacentes)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}$$

1. **A faire après lundi, vous pouvez me rendre le DM sans si besoin** Proposer un programme en Python permettant de calculer S_n.
2. Montrer que les suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes.
3. En déduire qu'elles sont convergentes vers une limite ℓ comprise entre $\frac{5}{4}$ et $\frac{7}{4}$.
4. On admet que $\ell = \frac{\pi^2}{6}$. Justifiez que $|S_n - \ell| \leq \frac{1}{n}$.
5. Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit qu'un nombre x est une approximation d'un nombre ℓ à 10^{-p} près si et seulement si $|x - \ell| \leq 10^{-p}$. Cela signifie en particulier que x et ℓ ont p décimales en commun.

   Par exemple, $3,14$ est une approximation à 10^{-2} près de π.

   (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la question 3, déterminez n tel que S_n est une approximation de $\frac{\pi^2}{6}$ à 10^{-p} près.

   (b) Calculez n pour $p = 10$. On considère que l'ordinateur met une milliseconde (soit $0,001s$) pour calculer 100 valeurs de S_n. Combien de temps (en unité compréhensible...[1]) lui faudra-t-il pour calculer les 10 premières décimales de $\frac{\pi^2}{6}$? Et si on en voulait 20 ?

1. On peut programmer de la façon suivante :

```
def somme(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
      S=S+1/(k**k)
    return S
```

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$, donc la suite (S_n) est croissante. D'autre part, on a $T_{n+1} - T_n = S_{n+1} - S_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$. En mettant au même dénominateur, on obtient : $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n(n+1)^2}(n + n(n+1) - (n+1)^2) = \frac{-1}{n(n+1)^2}$. La suite (T_n) est donc décroissante.

   Enfin, $T_n - S_n = \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n\to+\infty} T_n - S_n = 0$.

   Les suites sont donc adjacentes.

3. Ces deux suites sont donc convergentes vers une même limite ℓ telle que $S_n \leq \ell \leq T_n$. Pour $n = 2$, on a $S_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ et $T_2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = 5/7$. On obtient donc bien $\boxed{\frac{5}{4} \leq \ell \leq \frac{7}{4}.}$

4. En partant de l'égalité $S_n \leq \ell \leq T_n$, on en déduit $0 \leq \ell - S_n \leq T_n - S_n$. Enfin, comme $T_n - S_n = \frac{1}{n}$ et qu'en fait $|S_n - \ell| = \ell - S_n$ (car $S_n \leq \ell$), on a l'inégalité souhaitée.

5. (a) On veut $|S_n - \frac{\pi^2}{6}| \leq 10^{-p}$. Il suffit donc d'avoir $\frac{1}{n} \leq 10^{-p}$, c'est à dire $n \geq 10^p$.

   (b) pour $p = 10$, on a donc $n = 10^{10}$ (c'est à dire 10 milliard). En une milliseconde, on en calcule 100, c'est à dire 10^2, donc il faut $10^{10}/10^2 = 10^8$ millisecondes pour tout calculer.

   Or $10^8 ms = 10^5 s \simeq 27,78h$, c'est à dire environ 1 jour, $3h$ et 45 minutes...

   Pour $p = 20$, il faut $10^{15}s$, soit environ 277 777 777 778 heures, soit 11 574 074 074 jours, c'est à dire à peu près 31 709 791 années...

   On peut considérer que ce n'est pas du tout une bonne façon d'approcher π !

[1] On rappelle qu'il faut 1000 millisecondes pour faire une seconde, qu'il y a 3600 secondes dans une heure, 24h dans une journée et 365 jours dans l'année