ECG1

DM de la semaine du 14/10.

Exercice 1 (Modélisation probabiliste d'un système de détection d'intrusion avancé) Une entreprise de cybersécurité a développé un système de détection d'intrusion (IDS) multicouche pour protéger les réseaux de ses clients. Le système fonctionne comme suit :

- Couche 1 (C1) : Analyse du trafic réseau, détecte 75% des intrusions.
- Couche 2 (C2) : Analyse comportementale, détecte 60% des intrusions non repérées par C1.
- Couche 3 (C3) : Intelligence artificielle, détecte 80% des intrusions ayant échappé à C1 et C2.

De plus :

- Le système peut générer des fausses alertes avec une probabilité de 5% pour C1, 3% pour C2, et 2% pour C3.
- On estime qu'il y a en moyenne 1000 tentatives d'accès par jour, dont 1% sont des intrusions réelles.
- Chaque fausse alerte coûte 200€ à l'entreprise en temps et en ressources.
- Chaque intrusion non détectée coûte en moyenne 100 000€.

1. Modélisez mathématiquement le système IDS. Définissez clairement les événements et les probabilités associées.
2. Calculez la probabilité qu'une intrusion réelle ne soit pas détectée par le système.
3. Calculer la probabilité qu'une alerte soit déclenchée pour un accès quelconque.
4. On observe qu'une alerte a été déclenchée. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une vraie intrusion ?
5. Soit A l'événement "une alerte est déclenchée par C1" et B l'événement "une alerte est déclenchée par C2". Déterminez si A et B sont indépendants. Justifiez votre réponse.
6. L'entreprise envisage d'ajouter une quatrième couche (C4) qui détecterait 90% des intrusions ayant échappé aux trois premières couches, mais qui augmenterait le taux de fausses alertes de 1% et coûterait 5000€ par jour à maintenir. Déterminez si cet investissement est rentable à long terme.

Exercice 2 Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(A_i\right)\right)$$

Indication : on pourra montrer que, pour tout réel x, on a $1 - x \leq e^{-x}$

Exercice 3 (Approximation du nombre d'or)

On appelle nombre d'or et on note ϕ la racine réelle positive du polynôme $X^2 - X - 1$.

1. Exprimez ϕ et justifier, sans calculatrice, que $1 < \phi < 2$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

et ainsi de suite,

$$u_n = \sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

avec n radicaux.
Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_{n+1} en fonction de u_n et donner f tel que $u_{n+1} = f(u_n)$

3. **Cette question sera à faire plus tard dans l'année.** Ecrire un programme en Python intitulé `suite`, d'argument une variable `n` et qui calcule le n-ème terme de la suite.

4. Dresser le tableau de variation de f et résoudre l'équation $f(x) = x$.

5. Montrez que pour tout $n \geq 1$,
$$0 \leq u_n \leq \phi.$$

6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$
Indication : commencez par montrer, en le justifiant, que $u_{n+1} - \phi = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi}$ et utilisez l'expression conjuguée.

7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

8. Conclure sur la convergence de la suite u_n.

9. On rappelle ce qui a été décrit dans l'exo 3 : on dit qu'un nombre x est une approximation d'un nombre α à 10^{-p} près si $|x - \alpha| \leq 10^{-p}$. Par exemple, $3,14$ est une approximation à 10^{-2} près de π.

   Soit $p \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la question 7, déterminez n tel que u_n est une approximation de ϕ à 10^{-p} près.

10. Application numerique : on pose $p = 1000$, et on suppose que l'ordinateur met 1 milliseconde pour calculer 100 termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Combien de temps l'ordinateur va-t-il mettre pour obtenir une précision à 1000 décimales du nombre d'or ?

    Comparez avec l'algorithme de l'exercice de la semaine passée.