ECG1

DM des vacances de la Toussaint.

Exercice 1 L'objectif est d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

Plus précisément, on étudiera les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des fonctions $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $g(x) = f(f(x))$.

1. On pose
$$f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}.$$
Donner l'ensemble de définition de f, puis, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et f. Justifier que u_n est bien défini pour tout entier n.

2. On pose
$$g : x \to f(f(x)).$$
Exprimer la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de g.

3. Calculer les premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, conjecturer le comportement de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Résoudre l'inéquation $g(x) - x \geq 0$.

5. Dresser le tableau de variations de g, et justifiez que, si
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
alors
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq g(x) \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
et que, si
$$x > \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
alors
$$g(x) > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

6. Étudier le sens de variation des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

7. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes? Si oui, vers quelle limite? On n'attend pas de justification pour la deuxième partie de la question.

   On pourra justifier plus tard la limite de ces suites quand on aura vu le chapitre sur la continuité.

Exercice 2
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} - 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$$

1. Pour tout entier n, on pose $y_n = x_{n+1} - x_n$. Déterminez y_0 et y_1 et montrez que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 2^n$$

2. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = \alpha 2^n$ où α est un réel fixé.
   Déterminez α pour que t_n vérifie la même relation de récurrence que la suite (y_n) de la question précédente.

3. Pour tout entier n, on pose $r_n = y_n - t_n$.
   (a) Déterminez r_0 et r_1. Exprimez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_{n+2} en fonction de r_{n+1} et r_n.
   (b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n, puis l'expression de y_n en fonction de n.

4. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k$.
5. Utiliser cette égalité et la définition trouvée plus tôt de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour écrire un programme Python qui calcule, pour n donné, x_n.
6. En déduire enfin l'expression de x_n en fonction de n.

Exercice 3 (à propos des cadeaux de Noël)
On distingue trois catégories de jouets :

- T : Les jouets traditionnels (poupées, peluches, etc...)
- M : les jouets à la mode tiré d'un livre, d'un film, d'une série TV, etc...
- S : les jouets scientifiques (jeu de vulgarisation, éducatif, etc...)

On estime que :

(i) Si un consommateur achète un jouet de la catégorie T pour le Noel d'une année, il choisira l'année suivante un jouet parmi n'importe quelle des trois catégories de manière équiprobable

(ii) Si un consommateur achète un jouet de la catégorie M, la probabilité que l'année suivante il choisisse un jouet T est 1/4, pour un jouet M 1/4 également et pour S, 1/2.

(iii) Si un consommateur a choisi un jouet de la catégorie S, il choisira un jouet T avec la probabilité 1/4, M avec la probabilité 1/2 et S avec la probabilité 1/4.

Objectif : Afin d'optimiser la production, on veut avoir une vision à long terme d'un tel marché et déterminer les parts de chaque produit.
Observation : Cette année, les ventes se répartissent de la façon suivante :

- $p_0 = \frac{45}{100}$ est la part de jouets vendu dans la catégorie T.
- $q_0 = \frac{25}{100}$ la part de celle de la catégorie M.
- $r_0 = \frac{30}{100}$ la part de celle de la catégorie S.

On désigne par p_n, q_n et r_n les parts respectives des jouets T,M et S dans les ventes des années suivantes, et on admet qu'on peut assimiler ces proportions aux probabilités des événements associés. Ainsi, p_n est la probabilité qu'un individu pris au hasard achète un jouet dans la catégorie T la n-ème année.

1. Calculez p_1, q_1 et r_1. Déterminez p_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n, puis de même avec q_n, et r_n.
2. Introduire une matrice A telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.
3. Soit P et R les matrices définies par
$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 11/2 & -11/2 \end{pmatrix}.$$
   a) Calculez PR. En déduire que P est inversible.
   b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.
   c) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   d) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Exprimez p_n, r_n et q_n en fonction de n.
5. En supposant que l'attitude des consommateurs ne changera pas, quelles parts occuperont les différents jouets à long terme?

Exercice 4 (Edhec ECS 2021)

1. Question préliminaire :

   On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

   $$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

   (a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.

   (c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité suivante :

   $$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$

   (d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

   On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

   $$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien définie et supérieur ou égal a 1 .

   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et donner sa limite.

   (c) Compléter le script suivant pour qu'il calcule le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

```
n=0
u=1  # u0=1

while u<=.........
    u=.............
    n=n+1
print(..........)
```

   (d) Écrire un scipt Python qui permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.

3. Recherche d'un équivalent de u_n.

   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.

   (b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (c) Utiliser la première question pour établir que : $\frac{u_n}{\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

4. (a) Exprimer S_n en fonction de u_n.

   Indication pas dans le sujet initial : on pourra calculer les premiers termes et démontrer une conjecture par récurrence.

   (b) Des propositions suivantes, laquelle (lesquelles) est (sont) vraies ? Justifier votre réponse.

   i. $\frac{4S_n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ ii. $\frac{nS_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ iii. $\frac{\frac{n}{2}}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ iv. $\frac{2S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$