ECG1

DM des vacances de la Toussaint.

Exercice 1 L'objectif est d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

Plus précisément, on étudiera les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des fonctions $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $g(x) = f(f(x))$.

1. On pose
$$f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}.$$
Donner l'ensemble de définition de f, puis, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et f. Justifier que u_n est bien défini pour tout entier n.

2. On pose
$$g : x \to f(f(x)).$$
Exprimer la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de g.

3. Calculer les premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, conjecturer le comportement de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Résoudre l'inéquation $g(x) - x \geq 0$.

5. Dresser le tableau de variations de g, et justifiez que, si
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
alors
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq g(x) \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
et que, si
$$x > \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
alors
$$g(x) > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

6. Étudier le sens de variation des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

7. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes? Si oui, vers quelle limite? On n'attend pas de justification pour la deuxième partie de la question.
On pourra justifier plus tard la limite de ces suites quand on aura vu le chapitre sur la continuité.

1. L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En effet, la fonction f n'est pas définie pour $x = 0$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{u_n}$$
Comme $u_0 = 1 \neq 0$, on a $u_1 = f(u_0) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ bien définie. Par récurrence, on montre que u_n est bien défini pour tout entier n et $u_n > 0$:
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n > 0$. On a alors $f(u_n)$ bien définie et $f(u_n) > 0$. Donc u_{n+1} existe et est supérieur à 0.
Conclusion : Par application du principe de récurrence, on a montré:
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n > 0.}$$

2. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \geq 1$:

$$u_{2n} = f(u_{2n-1}) = f(f(u_{2n-2})) = \boxed{g(u_{2(n-1)})}$$

La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \geq 1$:

$$u_{2n+1} = f(u_{2n}) = g(u_{2n-1}) = \boxed{g(u_{2(n-1)+1})}$$

3. Les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont :

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{5}{3}, u_4 = \frac{8}{5}, u_5 = \frac{13}{8}, \dots$$

On constate que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ semble $\boxed{\text{croissante}}$ et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ semble $\boxed{\text{décroissante}}$. De plus, elles semblent adjacentes.

4. Résolution de l'inéquation $g(x) - x \geq 0$:

$$g(x) - x = f(f(x)) - x = \left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) - x = \frac{2x+1}{x+1} - x = \frac{-x^2+x+1}{x+1}$$

Il faut alors étudier le signe de cette expression :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{-x^2+x+1}{x+1}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)-x$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Cette expression est positive si et seulement si $\boxed{x \in]-\infty;-1[\cup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right[\cup]0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].}$

5. Pour le tableau de variations de g, on commence par calculer la dérivée pour $x \neq -1$ et $x \neq 0$ (elle existe par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas). On a, pour tout tel x :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2x+1}{x+1} \\ g'(x) &= \frac{(x+1)(2) - (2x+1)(1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$. Pour simplifier, on peut définir $g(1) = \frac{3}{2}$ afin que notre fonction soit continue sur $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

En ajoutant les informations trouvées question précédente, on a alors :

$$\begin{aligned} &\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \implies &g(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \leq g(x) \leq g(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \text{ car la fonction } g \text{ est croissante sur } \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \\ \implies &\boxed{\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq g(x) \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

On peut encore utiliser la croissance de g pour avoir

$$\begin{aligned} & x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \implies & g(x) \geq g(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \text{ car la fonction } g \text{ est croissante sur } \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[\\ \implies & \boxed{g(x) \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

6. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$:

   Initialisation : $u_0 = 1$ donc vrai au rang 0.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_{2n} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Montrons que $u_{2n+2} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

   On a $u_{2n+2} = g(u_{2n}) \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ car $u_{2n} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et alors d'après la question précédente c'est aussi le cas pour $g(u_{2n})$.

   Conclusion : Par application du principe de récurrence on a :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]}$$

   .

   Mais alors, on a, d'après la question 4:

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} - u_{2n} = g(u_{2n}) - u_{2n} \geq 0$$

   Et $\boxed{\text{la suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc croissante!}}$

   Je vous laisse écrire la même chose pour la suite des termes impairs, mais cette fois-ci elle sera à valeurs dans $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$ et donc $\boxed{\text{décroissante.}}$

7. $\boxed{\text{Les suites } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes vers } \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Pour montrer qu'elles sont convergentes, il suffit de voir qu'elles sont croissante (resp décroissante) et majorée (resp minorée) par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 2

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} - 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$$

1. Pour tout entier n, on pose $y_n = x_{n+1} - x_n$. Déterminez y_0 et y_1 et montrez que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 2^n$$
2. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = \alpha 2^n$ où α est un réel fixé.
   Déterminez α pour que t_n vérifie la même relation de récurrence que la suite (y_n) de la question précédente.
3. Pour tout entier n, on pose $r_n = y_n - t_n$.
   (a) Déterminez r_0 et r_1. Exprimez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_{n+2} en fonction de r_{n+1} et r_n.
   (b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n, puis l'expression de y_n en fonction de n.
4. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k$.
5. Utiliser cette égalité et la définition trouvée plus tôt de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour écrire un programme Python qui calcule, pour n donné, x_n.
6. En déduire enfin l'expression de x_n en fonction de n.

1. • $y_0 = x_1 - x_0 = 2 - 0 = \boxed{2}$
   • $y_1 = x_2 - x_1 = -1 - 2 = \boxed{-3}$

   Pour montrer la relation de récurrence, on utilise la définition de y_n. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$y_{n+2} = x_{n+3} - x_{n+2}$$
$$y_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}$$
$$y_n = x_{n+1} - x_n$$

   En utilisant la relation de récurrence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$x_{n+3} - 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$$

   On obtient :

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = (x_{n+3} - x_{n+2}) - (x_{n+2} - x_{n+1}) - 6(x_{n+1} - x_n)$$
$$= x_{n+3} - 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$$

   Donc, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien la relation de récurrence :

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 2^n$$

2. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = \alpha 2^n$ où α est un réel fixé.
   Déterminons α pour que t_n vérifie la même relation de récurrence que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question précédente. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$t_{n+2} - t_{n+1} - 6t_n = \alpha 2^{n+2} - \alpha 2^{n+1} - 6\alpha 2^n$$
$$= \alpha 2^n(4 - 2 - 6) = \alpha 2^n(-4)$$

   Pour que cette relation soit égale à 2^n, il faut que :

$$\alpha(-4) = 1 \text{ donc } \boxed{\alpha = -\frac{1}{4}.}$$

   Donc, on peut prendre $\boxed{(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-\frac{1}{4}2^n)_{n\in\mathbb{N}}.}$

3. Pour tout entier n, on pose $r_n = y_n - t_n$.

   (a) On a :
   • $r_0 = y_0 - t_0 = 2 - (-\frac{1}{4}2^0) = 2 + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{9}{4}}$
   • $r_1 = y_1 - t_1 = -3 - (-\frac{1}{4}2^1) = -3 + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{5}{2}}$

   La relation de récurrence pour r_n est : Pour tout entier n,

$$r_{n+2} = y_{n+2} - t_{n+2} = (y_{n+1} + 6y_n + 2^n) - (-\frac{1}{4}2^{n+2})$$
$$= \boxed{r_{n+1} + 6r_n}$$

   (b) Expression de r_n en fonction de n:
   La relation de récurrence homogène $r_{n+2} - r_{n+1} - 6r_n = 0$ a pour solution caractéristique :

$$r_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

   où λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Donc, $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = -2$.
Ainsi, $\boxed{r_n = A3^n + B(-2)^n.}$
En utilisant les conditions initiales :

$$\begin{cases} r_0 = \frac{9}{4} = A + B \\ r_1 = -\frac{5}{2} = 3A - 2B \end{cases}$$

Résolvons ce système avec l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A + B & = & \frac{9}{4} \\ 3A - 2B & = & -\frac{5}{2} \end{array} \right.$$

- Multiplions la première ligne par 3 et soustrayons la deuxième ligne :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} A & +B & = \frac{9}{4} & \\ & -5B & = -\frac{47}{4} & L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$$

- Divisons la deuxième ligne par -5 :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} A & +B & = \frac{9}{4} & \\ & B & = -\frac{47}{20} & L_3/(-5) \end{array} \right.$$

- Soustrayons la deuxième ligne de la première ligne :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} A & & = -\frac{1}{10} & L_1 - L_3 \\ & B & = -\frac{47}{20} & \end{array} \right.$$

Donc, $A = -\frac{1}{10}$ et $B = \frac{47}{20}$.
Ainsi,

$$\boxed{r_n = -\frac{1}{10}3^n + \frac{47}{20}(-2)^n.}$$

On a alors l'expression de y_n en fonction de n:

$$y_n = r_n + t_n = \boxed{-\frac{1}{10}3^n - \frac{47}{10}(-2)^{n+1} - 2^{n-2}}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k$.
   Utilisons cette égalité et la définition trouvée plus tôt de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour écrire un programme Python qui calcule, pour n donné, x_n.

Listing 1: Calcul de x_n en Python

```python
def calculate_x(n):
    x = 0
    for k in range(n):
        x =x+ -1/10 * 3**k + 47/20 * (-2)**k - 1/4 * 2**k
    return x

# Exemple d'utilisation
n = 5
print("x_",n," = ",calculate_x_n(n))

```

5. En utilisant la somme des termes de y_k :

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{10}3^k + \frac{47}{20}(-2)^k - \frac{1}{4}2^k \right)$$

Nous allons décomposer la somme en trois sommes géométriques distinctes et les calculer séparément.

- Calcul de la première somme géométrique

$$\sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{10}3^k$$

La somme d'une suite géométrique de raison r et de premier terme a est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

Ici, $a = -\frac{1}{10}$ et $r = 3$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{10}3^k = -\frac{1}{10}\frac{1-3^n}{1-3} = -\frac{1}{10}\frac{1-3^n}{-2} = \frac{1-3^n}{20}$$

- Calcul de la deuxième somme géométrique

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{47}{20}(-2)^k$$

Ici, $a = \frac{47}{20}$ et $r = -2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{47}{20}(-2)^k = \frac{47}{20}\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = \frac{47}{20}\frac{1-(-2)^n}{3} = \frac{47}{60}(1-(-2)^n)$$

- Calcul de la troisième somme géométrique

$$\sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{4}2^k$$

Ici, $a = -\frac{1}{4}$ et $r = 2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{4}2^k = -\frac{1}{4}\frac{1-2^n}{1-2} = -\frac{1}{4}\frac{1-2^n}{-1} = \frac{1-2^n}{4}$$

- Somme totale
  En combinant les trois sommes, nous obtenons :

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{10}3^k + \frac{47}{20}(-2)^k - \frac{1}{4}2^k\right)$$

$$x_n = \frac{1-3^n}{20} + \frac{47}{60}(1-(-2)^n) + \frac{1-2^n}{4}$$

Pour simplifier, nous mettons tout sur un dénominateur commun de 60 :

$$x_n = \frac{3(1-3^n)}{60} + \frac{47(1-(-2)^n)}{60} + \frac{15(1-2^n)}{60}$$

$$x_n = \frac{3(1-3^n) + 47(1-(-2)^n) + 15(1-2^n)}{60}$$

Développons les termes au numérateur :

$$x_n = \frac{3 - 3\cdot 3^n + 47 - 47\cdot(-2)^n + 15 - 15\cdot 2^n}{60}$$

$$x_n = \frac{3 + 47 + 15 - 3 \cdot 3^n - 47 \cdot (-2)^n - 15 \cdot 2^n}{60}$$

$$x_n = \frac{65 - 3 \cdot 3^n - 47 \cdot (-2)^n - 15 \cdot 2^n}{60}$$

Donc, l'expression finale de x_n en fonction de n est :

$$\boxed{x_n = \frac{65 - 3 \cdot 3^n - 47 \cdot (-2)^n - 15 \cdot 2^n}{60}}$$

Exercice 3 (à propos des cadeaux de Noël)
On distingue trois catégories de jouets :

- T : Les jouets traditionnels (poupées, peluches, etc...)
- M : les jouets à la mode tiré d'un livre, d'un film, d'une série TV, etc...
- S : les jouets scientifiques (jeu de vulgarisation, éducatif, etc...)

On estime que :

(i) Si un consommateur achète un jouet de la catégorie T pour le Noel d'une année, il choisira l'année suivante un jouet parmi n'importe quelle des trois catégories de manière équiprobable

(ii) Si un consommateur achète un jouet de la catégorie M, la probabilité que l'année suivante il choisisse un jouet T est $1/4$, pour un jouet M $1/4$ également et pour S, $1/2$.

(iii) Si un consommateur a choisi un jouet de la catégorie S, il choisira un jouet T avec la probabilité $1/4$, M avec la probabilité $1/2$ et S avec la probabilité $1/4$.

Objectif : Afin d'optimiser la production, on veut avoir une vision à long terme d'un tel marché et déterminer les parts de chaque produit.
Observation : Cette année, les ventes se répartissent de la façon suivante :

- $p_0 = \frac{45}{100}$ est la part de jouets vendu dans la catégorie T.
- $q_0 = \frac{25}{100}$ la part de celle de la catégorie M.
- $r_0 = \frac{30}{100}$ la part de celle de la catégorie S.

On désigne par p_n, q_n et r_n les parts respectives des jouets T,M et S dans les ventes des années suivantes, et on admet qu'on peut assimiler ces proportions aux probabilités des événements associés. Ainsi, p_n est la probabilité qu'un individu pris au hasard achète un jouet dans la catégorie T la n-ème année.

1. Calculez p_1, q_1 et r_1. Déterminez p_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n, puis de même avec q_n, et r_n.
2. Introduire une matrice A telle que $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.
3. Soit P et R les matrices définies par

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 11/2 & -11/2 \end{pmatrix}.$$

   a) Calculez PR. En déduire que P est inversible.
   b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.
   c) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   d) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Exprimez p_n, r_n et q_n en fonction de n.
5. En supposant que l'attitude des consommateurs ne changera pas, quelles parts occuperont les différents jouets à long terme?

Exercice 4 (Edhec ECS 2021)

1. Question préliminaire :

   On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

   $$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

   (a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.

   (c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité suivante :

   $$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$

   (d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

   On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

   $$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien définie et supérieur ou égal a 1 .

   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et donner sa limite.

   (c) Compléter le script suivant pour qu'il calcule le n-ième terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

```
n=0
u=1  # u0=1

while u<=.........
    u=.............
    n=n+1
print(..........)
```

   (d) Écrire un scipt Python qui permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.

3. Recherche d'un équivalent de u_n.

   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.

   (b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (c) Utiliser la première question pour établir que : $\frac{u_n}{\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

4. (a) Exprimer S_n en fonction de u_n.

   Indication pas dans le sujet initial : on pourra calculer les premiers termes et démontrer une conjecture par récurrence.

   (b) Des propositions suivantes, laquelle (lesquelles) est (sont) vraies ? Justifier votre réponse.

   i. $\frac{4S_n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ ii. $\frac{nS_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ iii. $\frac{\frac{n}{2}}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ iv. $\frac{2S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$ on a par croissance de la suite :

   $$a_k \leqslant a_n$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} a_n \qquad \text{autrement dit} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant n a_n$$

En divisant par n qui est strictement positif on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant a_n$$

On a bien établi :

$$\boxed{b_n \leqslant a_n}$$

On étudie maintenant la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On s'intéresse au signe de $b_{n+1}-b_n$. On remarque que :

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{n+1}\times\left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) = \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+1}\times\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{=b_n} = \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+1}b_n$$

On a donc :

$$b_{n+1}-b_n = \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+1}b_n - b_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geqslant 0}\times\underbrace{(a_n-b_n)}_{\geqslant 0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{b_{n+1}-b_n \geqslant 0}$$

Bilan : la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

(b) Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge vers le réel ℓ on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $a_n \leqslant \ell$. Or, on vient de montrer que $b_n \leqslant a_n$. On a donc :

$$b_n \leqslant \ell$$

Ceci prouve que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée De plus, elle est croissante (question 1.a). On en déduit qu'elle converge vers un réel que l'on note ℓ'. Enfin, en passant à la limite dans l'inégalité

$$b_n \leqslant \ell$$

on obtient bien :

$$\boxed{\ell' \leqslant \ell}$$

(c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$b_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} a_k = \frac{1}{2n}\times\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1} a_k$$

Or, d'une part :

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{2}\times\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{b_n} = \frac{b_n}{2}$$

D'autre part, pour tout $k\in[\![n;2n-1]\!]$ on a (par croissance de la suite) :

$$a_k \geqslant a_n$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant \underbrace{\sum_{k=n}^{2n-1} a_n}_{na_n} \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant \frac{a_n}{2}$$

On a bien établi l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{b_{2n} \geqslant \frac{b_n}{2} + \frac{a_n}{2}}$$

(d) En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\ell' \geqslant \frac{\ell'}{2} + \frac{\ell}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\ell' \geqslant \ell}$$

De plus on a établi en question 1.b l'inégalité $\ell' \leqslant \ell$. On en déduit que : $\ell' = \ell$. Autrement dit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n}$$

2. (a) On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : Pour $n = 0$, le terme u_0 est bien défini et vaut 1. On a donc bien : $u_0 \geqslant 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n est bien défini et que : $u_n \geqslant 1$. Montrons que :

$$u_{n+1} \text{ est bien défini et que : } u_{n+1} \geqslant 1$$

On a : $u_n^2 \geqslant 0$ et $u_n \geqslant 1$ donc : $u_n^2 + u_n \geqslant 1$. Le terme $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ est donc bien défini (la quantité sous la racine est positive) et par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$:

$$u_{n+1} \geqslant \sqrt{1} \quad \text{autrement dit} \quad \boxed{u_{n+1} \geqslant 1}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geqslant 0$ donc :

$$u_n^2 + u_n \geqslant u_n^2$$

Par croissance de la fonction racine on en déduit :

$$\underbrace{\sqrt{u_n^2 + u_n}}_{u_{n+1}} \geqslant \sqrt{u_n^2}$$

Enfin, $u_n \geqslant 0$ donc $\sqrt{u_n^2} = u_n$. On a donc établi l'inégalité :

$$\boxed{u_{n+1} \geqslant u_n}$$

Ceci prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante On a donc deux possibilités :

1) soit cette suite converge
2) soit elle diverge vers $+\infty$.

On va écarter le cas 1) en raisonnant par l'absurde. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers un réel que l'on note c. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \quad \text{donc} \quad u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$$

En passant à la limite dans cette égalité on obtient :

$$c^2 = c^2 + c \quad \text{donc} \quad c = 0$$

D'autre part, $u_0 = 1$ et la suite est croissante. On a donc nécessairement : $c \geqslant 1$.

On obtient la contradiction suivante : $0 \geqslant 1$.

Ceci prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, et donc qu'elle diverge vers $+\infty$

(c)

```
n=1
u=1
S=1
while S<=1000
    u=sqrt(u^2+u)
    S=S+u
    n=n+1
end
print(n)
```

Remarque Comme $S_n \geqslant u_{n-1}$, S_n tend vers $+\infty$. Ceci garantit que la boucle while s'arrêtera.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1}-u_n = \sqrt{u_n^2+u_n}-u_n = \frac{\left(\sqrt{u_n^2+u_n}-u_n\right)\times\left(\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n\right)}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n} = \frac{\sqrt{u_n^2+u_n}^2-u_n^2}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n}$$

En divisant numérateur et dénominateur par u_n (licite car $u_n > 0$) on obtient :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+1}$$

Enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$ donc par continuité de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$ en $x=0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+1} \qquad \text{existe et vaut} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

On a bien montré que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \frac{1}{2}}$$

Remarque On pouvait aussi partir de l'écriture $u_{n+1}-u_n = u_n \times \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{u_n}}-1\right)$ et appliquer l'équivalent usuel $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$ à $x = \dfrac{1}{u_n}$.

(b) La fonction f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1 = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right)\times\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)}{2\sqrt{x^2+x}\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)}$$

Le dénominateur est positif et le numérateur vaut :

$$\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right)\times\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right) = (2x+1)^2-\left(2\sqrt{x^2+x}\right)^2 = 4x^2+4x+1-4(x^2+x) = 1 > 0$$

On a donc, pour tout $x \in [1;+\infty[$: $\boxed{f'(x) > 0}$ Ceci prouve que

la fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

On va maintenant montrer que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que :

$$u_{n+1}-u_n \leqslant u_{n+2}-u_{n+1}$$

On a :

$$u_{n+1}-u_n = \sqrt{u_n^2+u_n}-u_n = f(u_n)$$

et de même :

$$u_{n+2}-u_{n+1} = f(u_{n+1})$$

Or, on sait que : $u_n \leqslant u_{n+1}$ (question 2.b). Par croissance de la fonction f on en déduit :

$$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - u_n \leqslant u_{n+2} - u_{n+1}$$

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

(c) On applique le raisonnement de la question 1 avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci est licite car la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante (3.b) et convergente (3.a). On sait d'après 1.d que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n} \times (u_n - u_0) = \frac{u_n}{n} - \frac{1}{n}$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} - \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n)\,\frac{1}{2} \quad \text{(d'après 3.a)}$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} - \underbrace{\frac{2}{n}}_{\text{tend vers } 0} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} = 1$$

Ceci prouve bien que : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}}$

4. (a) On commence par calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

n	0	1	2	3
u_n	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
S_n		1	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Sur les premiers termes la formule $\boxed{S_n = u_n^2 - 1}$ est vérifiée. Essayons d'établir cette formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. **Initialisation :** Pour $n = 1$ on a bien :

$$\underbrace{S_1}_{1} = \underbrace{u_1^2 - 1}_{2-1}$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que : $S_n = u_n^2 - 1$. Montrons que : $S_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1$. On a :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = S_n + u_n$$

Par hypothèse de récurrence : $S_n = u_n^2 - 1$. Donc :

$$S_{n+1} = u_n^2 - 1 + u_n$$

D'autre part :

$$u_{n+1}^2 - 1 = \sqrt{u_n^2 + u_n}^2 - 1 = u_n^2 + u_n - 1$$

On a donc bien : $\boxed{S_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1}$

Conclusion : Par application du principe de récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = u_n^2 - 1}$$

On cherche maintenant un équivalent de S_n en $+\infty$. On a :

$$\frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} = \frac{u_n^2}{\frac{n^2}{4}} - \frac{1}{\frac{n^2}{4}} = \underbrace{\left(\frac{u_n}{\frac{n}{2}}\right)^2}_{\text{tend vers } 1} - \underbrace{\frac{4}{n^2}}_{\text{tend vers } 0} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} = 1$$

Bilan : $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4}}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a donc les équivalences suivantes :

$$S_n \leqslant 1000 \iff u_n^2 - 1 \leqslant 1000 \iff u_n^2 \leqslant 1001 \iff u_n \leqslant \sqrt{1001}$$

(on a utilisé la stricte croissance de la fonction racine carrée). D'où le programme suivant :

```
n=0
u=1
while u<=sqrt(1001)
    u=sqrt(u^2+u)
    n=n+1
print(n)
```