ECG1

DM Semaine 7 Polynômes

Exercice 1 (Un exo de calcul très simple pour commencer) 1. Effectuer les divisions euclidiennes de

$$3X^5 + 4X^2 + 1 \text{ par } X^2 + 2X + 3$$
$$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 \text{ par } X^3 + X + 2$$

2. Calculer les restes de la division euclidienne du polynôme X^n par les polynômes : X^2+3X+2, X^2+X+1 puis $(X-1)^2$.

3. Donner les factorisations des polynômes suivants : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \quad Q(x) = x^4 + 4x^2 + 9 \quad S(x) = x^6 + x^5 - 3x^3 - 16x^2 + 2x - 12$$

Exercice 2 On considère les polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ \forall n \geq 0,\ P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x) \end{cases}$$

Étude générale des polynômes.

1. Calculez P_2 et P_3 et donner leur forme factorisée dans $\mathbb{R}[x]$

2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de P_n est n et que le coefficient dominant est 2^{n-1}

3. (a) Déterminez en fonction de n la parité de P_n, c'est à dire : a-t-on pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(-x) = P_n(x)$ (on dit que P_n est pair) ? a-t-on pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(-x) = -P_n(x)$ (on dit que P_n est impair) ?
   (b) Calculez $P_n(1)$ puis $P_n(-1)$.

4. Proposez un programme qui représente P_3 entre -2 et 2.

   Application à la trigonométrie.
   On rappelle que $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

5. Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.

6. Montrer que si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a
$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

7. Utiliser ce résultat pour calculer $\cos(\frac{\pi}{6})$.

Exercice 3 Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - 2X^2 + X + 3$. Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.
Cet exercice est un peu plus difficile, n'hésitez pas à me demander après avoir cherché si vous bloquez.