ECG1

DM Semaine 7 Polynômes

Exercice 1 (Un exo de calcul très simple pour commencer) 1. Effectuer les divisions euclidiennes de

$$3X^5 + 4X^2 + 1 \text{ par } X^2 + 2X + 3$$
$$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 \text{ par } X^3 + X + 2$$

2. Calculer les restes de la division euclidienne du polynôme X^n par les polynômes : X^2+3X+2, X^2+X+1 puis $(X-1)^2$.

3. Donner les factorisations des polynômes suivants : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \quad Q(x) = x^4 + 4x^2 + 9 \quad R(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 50x$$

1.
   - Pour $3X^5 + 4X^2 + 1$, on a :
     Quotient: $3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$
     Reste: $-41X - 47$
   - Pour $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$, on a :
     Quotient: $3X^2 + 2X - 3$
     Reste: $-9X^2 - X + 7$

2.
   - Pour $X^2 + 3X + 2$, on a, par le théorème de division euclidienne:
     $X^n = Q_n(X)(X^2 + 3X + 2) + R_n(X)$ où $R_n(X)$ est le reste de degré au plus 1. Il existe donc a_n et b_n réels tels que $R_n(X) = a_nX + b_n$.
     On trouve les racines de $X^2 + 3X + 2$: -1 et -2. Alors en évaluant en -1 et -2, on trouve le système suivant :
     $$\begin{cases} -a_n + b_n = (-1)^n \\ -2a_n + b_n = (-2)^n \end{cases}$$
     On le résout par pivot de Gauss :
     $$\begin{cases} b_n = 2(-1)^n - (-2)^n & 2L_1 - L_2 \\ a_n = (-1)^{n+1} - (-2)^n & L_1 - L_2 \end{cases}$$
     Donc le reste est $\boxed{R_n(X) = \left((-1)^{n+1} - (-2)^n\right) X + (2(-1)^n - (-2)^n).}$
   - Pour $X^2 + X + 1$, on a, par le théorème de division euclidienne:
     $X^n = Q_n(X)(X^2 + X + 1) + R_n(X)$ où $R_n(X)$ est le reste de degré au plus 1. Donc il existe a_n et b_n réels tels que $R_n(X) = a_nX + b_n$. Comme le polynôme $X^2 + X + 1$ n'a pas de racine réelle, on doit trouver une autre méthode pour trouver a_n et b_n. Analysons la situation :
     - Pour $n = 0$, $R_0(X) = 1$ donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$
     - Pour $n = 1$, $R_1(X) = X$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$

     Supposons que pour un certain $n \geq 1$, on ait $R_n(X) = a_nX + b_n$ et $R_{n-1}(X) = a_{n-1}X + b_{n-1}$. Alors :
     $$\begin{aligned} X^{n+1} &= X \cdot X^n \\ &= X\left(Q_n(X)(X^2 + X + 1) + R_n(X)\right) \\ &= XQ_n(X)(X^2 + X + 1) + X(a_nX + b_n) \\ &= XQ_n(X)(X^2 + X + 1) + a_nX^2 + b_nX \\ &= XQ_n(X)(X^2 + X + 1) + a_n((X^2 + X + 1) - X - 1) + b_nX \\ &= (XQ_n(X) + a_n)(X^2 + X + 1) - a_nX - a_n + b_nX \\ &= (XQ_n(X) + a_n)(X^2 + X + 1) + (b_n - a_n)X + (-a_n) \end{aligned}$$

Donc $R_{n+1}(X) = (b_n - a_n)X + (-a_n)$. On en déduit le système de récurrence suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = -a_n \end{cases}$$

Il s'agit alors d'étudier ces deux suites. Pas mal de manières de le faire, je propose d'utiliser les matrices: on pose, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Alors on a $U_{n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} U_n$. En itérant, on trouve $U_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n U_0$ où $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose donc $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculons $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I_2$. On remarque que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 3. On en déduit que :

$$U_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \equiv 0 \mod 3 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \equiv 1 \mod 3 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{si } n \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

Donc le reste est

$$R_n(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \mod 3 \\ X & \text{si } n \equiv 1 \mod 3 \\ -X - 1 & \text{si } n \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

Dans tout ce qui précède, j'ai noté mod 3 le reste de la division euclidienne par 3.

- Pour $(X-1)^2$, on a $X^n = Q(X)(X-1)^2 + T_n(X)$ où $T_n(X)$ est le reste de degré au plus 1. Donc il existe a_n et b_n réels tels que $T_n(X) = a_nX + b_n$. On a, en dérivant :

$$\begin{aligned} X^n &= Q(X)(X-1)^2 + a_nX + b_n \\ nX^{n-1} &= Q'(X)(X-1)^2 + 2Q(X)(X-1) + a_n \end{aligned}$$

En évaluant en $X = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} 1^n &= a_n + b_n \\ n1^{n-1} &= a_n \end{aligned}$$

Donc $a_n = n$ et $b_n = 1 - n$. Le reste est donc $\boxed{T_n(X) = nX + 1 - n.}$

3. - Pour $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, on trouve que $P(1) = 0$. Donc $x - 1$ divise $P(x)$. En effectuant la division euclidienne, on trouve :

$$\boxed{P(x) = (x-1)^2(x-2)}$$

- Pour $Q(x) = x^4 + 4x^2 + 9$, on remarque que le polynôme n'a pas de racine réelle (le discriminant de $x^4 + 4x^2 + 9$ vu comme un polynôme en x^2 est négatif). On utilise les identités remarquables:

$$(x^2+3)^2 = x^4 + 6x^2 + 9$$

Donc :

$$Q(x) = (x^2+3)^2 - 2x^2 = (x^2 + 3 - \sqrt{2}x)(x^2 + 3 + \sqrt{2}x)$$

On véeifie que les deux polynômes du produit n'ont pas de racine réelle (leur discriminant est négatif). Donc la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$\boxed{Q(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 3)(x^2 + \sqrt{2}x + 3)}$$

- Pour $S(x) = x^6 + x^5 - 3x^3 - 16x^2 + 2x - 12$, on trouve que $S(2) = 0$. Donc $x - 2$ divise $S(x)$. En effectuant la division euclidienne, on trouve :

$$S(x) = (x-2)(x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 2x + 6)$$

Et là, grosse erreur de ma part lors de la composition de l'exercice : je croyais avoir une autre racine évidente, mais non. Il est théoriquement possible de factoriser davantage, mais je ne sais pas comment trouver la racine exacte suivante! Vive les erreurs de calcul...

Exercice 2 On considère les polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ \forall n \geq 0,\ P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x) \end{cases}$$

Étude générale des polynômes.

1. Calculez P_2 et P_3 et donner leur forme factorisée dans $\mathbb{R}[x]$
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de P_n est n et que le coefficient dominant est 2^{n-1}
3. (a) Déterminez en fonction de n la parité de P_n, c'est à dire : a-t-on pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(-x) = P_n(x)$ (on dit que P_n est pair) ? a-t-on pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(-x) = -P_n(x)$ (on dit que P_n est impair) ?
   (b) Calculez $P_n(1)$ puis $P_n(-1)$.
4. Proposez un programme qui représente P_3 entre -2 et 2.

   Application à la trigonométrie.
   On rappelle que $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
5. Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.
6. Montrer que si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a
$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
7. Utiliser ce résultat pour calculer $\cos(\frac{\pi}{6})$.

1. On a $P_2(x) = 2x^2 - 1 = \boxed{2(x - \frac{1}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}})}$ et $P_3(x) = 4x^3 - 3x = \boxed{4x(x - \frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{\sqrt{3}}{2})}$.
2. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de P_n est n et que le coefficient dominant est 2^{n-1}.

   Initialisation : Pour $n = 1$, $P_1(x) = x$ est de degré 1 avec coefficient dominant $1 = 2^{1-1} = 2^0$. Pour $n = 2$, $P_2(x) = 2x^2 - 1$ est de degré 2 avec coefficient dominant $2 = 2^{2-1} = 2^1$.

   Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons que P_n est de degré n avec coefficient dominant 2^{n-1} et que P_{n+1} est de degré $n+1$ avec coefficient dominant 2^n.

   Alors :

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x)$$

   Le terme de plus haut degré de $2xP_{n+1}(x)$ est $2x \cdot 2^n x^{n+1} = 2^{n+1}x^{n+2}$. Le terme de plus haut degré de $P_n(x)$ est $2^{n-1}x^n$.

   Comme $n + 2 > n$, le terme de plus haut degré de $P_{n+2}(x)$ est $2^{n+1}x^{n+2}$, donc P_{n+2} est de degré $n+2$ avec coefficient dominant $2^{n+1} = 2^{(n+2)-1}$.

   Conclusion : Par le principe de récurrence,

   $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \text{ est de degré } n \text{ avec coefficient dominant } 2^{n-1}.}$
3. (a) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_{2n} est pair et P_{2n+1} est impair.
   Initialisation : Pour $n = 0$, $P_0(x) = 1$ est pair. Pour $n = 1$, $P_1(x) = x$ est impair.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_{2n} est pair et P_{2n+1} est impair. Alors :

$$\begin{aligned} P_{2n+2}(-x) &= 2(-x)P_{2n+1}(-x) - P_{2n}(-x) \\ &= -2x(-P_{2n+1}(x)) - P_{2n}(x) \\ &= 2xP_{2n+1}(x) - P_{2n}(x) \\ &= \boxed{P_{2n+2}(x)} \end{aligned}$$

Donc P_{2n+2} est pair. De plus :

$$\begin{aligned} P_{2n+3}(-x) &= 2(-x)P_{2n+2}(-x) - P_{2n+1}(-x) \\ &= -2xP_{2n+2}(x) - (-P_{2n+1}(x)) \\ &= -2xP_{2n+2}(x) + P_{2n+1}(x) \\ &= \boxed{-P_{2n+3}(x)} \end{aligned}$$

Donc P_{2n+3} est impair.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_{2n} \text{ est pair et } P_{2n+1} \text{ est impair.}}$

(b) Ici encore, de la récurrence double!

Initialisation : $P_0(1) = 1$, $P_1(1) = 1$ et $P_0(-1) = 1$, $P_1(-1) = -1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P_n(1) = 1$ et $P_{n+1}(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$. Alors :

$$\begin{aligned} P_{n+2}(1) &= 2P_{n+1}(1) - P_n(1) \\ &= 2 \cdot 1 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_{n+2}(-1) &= 2(-1)P_{n+1}(-1) - P_n(-1) \\ &= -2(-1)^{n+1} - (-1)^n \\ &= 2(-1)^n - (-1)^n \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

Donc $P_{n+2}(1) = 1$ et $P_{n+2}(-1) = (-1)^{n+2}$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n(1) = 1 \text{ et } P_n(-1) = (-1)^n.}$

4. Voici un programme en Python qui représente P_3 entre -2 et 2 :

```
import numpy as np
from matplotlib.pyplot import *
x = np.linspace(-2, 2, 100)
P3 = 4*x**3 - 3*x
plot(x, P3)
show()
```

5. On a :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + \cos(a-b) &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + (\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)) \\ &= \boxed{2\cos(a)\cos(b)} \end{aligned}$$

En particulier, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta).$$

Je mets ici cette formule car elle sera utile pour la suite!

6. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $P_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$. Pour $n = 1$, $P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1\theta)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $P_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$. Alors :

$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)P_{n+1}(\cos(\theta)) - P_n(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) \end{aligned}$$

Conclusion : Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).}$

7. On a :
$$P_3(\cos(\theta)) = \cos(3\theta).$$
En particulier, pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, on a :
$$\begin{aligned} P_3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) &= \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$
Or, $P_3(x) = 4x^3 - 3x$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ est une racine de P_3. On a vu que les racines de P_3 sont $0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$, on en déduit que :
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Donc $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$

Exercice 3 Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 - 2X^2 + X + 3$. Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.
Cet exercice est un peu plus difficile, n'hésitez pas à me demander après avoir cherché si vous bloquez.

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 + X + 3$. On a x_1, x_2, x_3 racines de P. Donc P s'écrit aussi :
$$P(X) = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$$
En développant, on trouve :
$$P(X) = X^3 - (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)X - x_1x_2x_3$$
En identifiant les coefficients, on trouve le système suivant :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{cases}$$
On cherche à calculer $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$. On calcule $(x_1 + x_2 + x_3)^3$ en développant :
$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)^3 &= S + 3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2) + 6x_1x_2x_3 \\ &\iff 2^3 = S + 3(x_1x_2(x_1 + x_2) + x_2x_3(x_2 + x_3) + x_3x_1(x_3 + x_1)) + 6(-3) \\ &\iff 24 = S + 3(x_1x_2(2 - x_3) + x_2x_3(2 - x_1) + x_3x_1(2 - x_2)) \\ &\iff 24 = S + 6(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 9(x_1x_2x_3) \\ &\iff 24 = S + 6 \cdot 1 - 9 \cdot (-3) \\ &\iff 24 = S + 6 + 27 \\ &\iff S = 24 - 33 \\ &\iff S = -9 \end{aligned}$$

- Donc $\boxed{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -9.}$