ECG1

DM de la semaine du 9/12.

J'attends de vous une copie par groupe de colle, chacun d'entre vous doit avoir rédigé l'un des trois exercices, mais le travail est collectif : vous devez tous les trois avoir compris comment faire tous les exercices.

Exercice 1 Donner si possible un équivalent des fonctions suivantes au point considéré et préciser les limites en ce point :

1. $a(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ en $0, +\infty$
2. $b(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ en $+\infty$
3. $c(x) = \ln\left(x^2\right) - x$ en $+\infty$
4. $d(x) = \frac{(x+1)^x - 1}{x}$ en 0
5. $e(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en 0
6. $f(x) = \sin x \ln x$ en 0
7. $g(x) = x\ln(1+x) - (x+1)\ln(x)$ en $+\infty$
8. $h(x) = \lfloor x \rfloor \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$
9. $i(x) = \frac{\ln\left(\cos^2(x)\right)}{x^2}$ en 0

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{2}\frac{(x+1)\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer le signe de f sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue en 1. f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?
3. Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
4. Soit g la fonction $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$.
   (a) Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
   (b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction g sur $]0, +\infty[$.
   (c) Préciser le signe de g sur $]0, +\infty[$.
5. En déduire le tableau de variations complet de f.
6. Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
7. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $\ln(x) < x - 1$. En déduire que, pour tout $x > 1$, on a $f(x) < x$.
8. Donner la représentation graphique de la fonction f avec sur le même graphique la droite d'équation $y = x$.
9. Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = a > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que la suite u est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite u.
   (c) En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.