ECG1

DM de la semaine du 16/12.

J'attends de vous une copie par groupe de colle, chacun d'entre vous doit avoir rédigé l'un des trois exercices, mais le travail est collectif : vous devez tous les trois avoir compris comment faire tous les exercices.

Exercice 1 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$.

1. (a) Déterminez l'ensemble de définition de f_n en fonction de n et justifiez qu'elle est continue sur cet ensemble de définition.
   (b) Peut-on prolonger f_n par continuité afin d'en faire une fonction continue sur $\mathbb{R}$? Justifiez soigneusement votre réponse.
   (c) Etudiez les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On restreint f_n à l'intervalle $[0, +\infty[$.
   (a) Donnez le tableau de variation de f_n sur cet intervalle et montrez qu'il existe un unique réel $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
   (b) Montrez que pour tout n, $n < u_n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
   (c) Calculez $f\left(n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)\right)$ afin de montrer que $u_n \leq n\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)$.
   (d) En déduire un équivalent de la suite u_n.

Exercice 2 Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 = a \in [-2, 2] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

1. Justifier que la suite (u_n) est bien définie et
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [-2, 2]$$
2. Quelles sont les limites finies possibles pour (u_n) ?
3. Montrer que $(|u_n - 1|)$ converge puis que $\lim |u_n - 1| = 0$. En déduire $\lim u_n$.

Exercice 3 (Très classique) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

1. Calculer $f(0)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$.
3. Établir que pour tout $r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar$ avec $a = f(1)$.
4. Conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$.