DM0
Révisions de première année

Ce devoir maison est le premier des vacances. Il est volontairement assez facile mais couvre beaucoup d'éléments du programme pour se remettre en jambes. Il y en aura deux autres plus difficile, un orienté algèbre-probas, et un analyse-probas, qui arriveront plus tard. Il y aura une interro sur l'un des exercices de chaque DM ainsi que sur le concours blanc la semaine de la rentrée.

Exercice 1 – Calcul matriciel, systèmes linéaires, polynômes

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver a et b tels que $P = X^2 + aX + b$ soit un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. **Application à l'inversibilité.**
   Montrer que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} comme un polynôme en A.
3. **Application au calcul des puissances.**
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) À l'aide du théorème de division euclidienne (dont on redonnera l'énoncé), montrer qu'il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^n = PQ_n + a_nX + b_n$ $(*)$.
   b) Déterminer a_n et b_n en fonction de n.
   c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
   d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   À l'aide de la formule du binôme de Newton (dont on rappellera l'énoncé pour les matrices), déterminer l'expression de $(A^{-1})^n$ en fonction de n.

Exercice 2 – Polynômes, espaces vectoriels de dimension finie, applications linéaires et matrices

On note φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le polynôme $\varphi(P) = P - (X+1)P'$.

1. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa matrice M dans la base canonique.
2. Montrer que $(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer la matrice A de φ dans cette base.
3. Déterminer le rang de φ puis la dimension du noyau de φ.
   φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?
4. Déterminer une base de l'image et une base du noyau de φ.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à déterminer $\varphi^n(X^2 + X + 1)$.
   a) Donner A^n.
   b) Déterminer les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$.
   c) En déduire le polynôme $\varphi^n(X^2 + X + 1)$.

Exercice 3 – Suites réelles, intégrale sur un segment, étude asymptotique de suites

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Calculer u_0, u_1 et u_2.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1.
   Que peut-on en déduire ?
4. a) Vérifier que $1 - u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$ pour tout entier naturel n, puis établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. À l'aide d'une intégration par parties, montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n) dt.$$
6. Soit x un réel positif. Montrer que $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
7. En déduire que $u_n \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 4 – Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires réelles discrètes

Étude d'un modèle de propagation d'une épidémie : l'urne de Pólya.
On considère une urne contenant au départ une boule blanche et une boule rouge.
On tire une boule de l'urne et on la remet avec une autre boule de la même couleur ; on a donc maintenant 3 boules. On recommence un certain nombre de fois l'opération qui consiste à tirer une boule de l'urne et à la remettre, avec une autre boule de la même couleur.
On cherche à étudier l'évolution de la proportion de boules blanches dans l'urne.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans l'urne au bout de n telles opérations (l'urne contient alors $2+n$ boules au total). On pose aussi $X_0 = 1$.
On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire discrète finie.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note aussi B_n l'événement « Obtenir une boule blanche lors du n-ème tirage », et R_n l'événement « Obtenir une boule rouge lors du n-ème tirage ».

1. Loi de X_0, X_1, X_2 et X_3

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_0 et X_1.
2. Représenter les trois premiers tirages avec un arbre binaire à 3 générations.
3. En déduire les lois de X_2 et X_3.
4. Quelle conjecture peut-on faire sur la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$?

2. Loi de X_n où $n \in \mathbb{N}$

1. Donner $X_n(\Omega)$.
2. Pour $k \in X_{n+1}(\Omega)$, justifier la formule suivante :
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([X_{n+1} = k] \cap [X_n = j]).$$
3. En déduire que pour $k \in X_{n+1}(\Omega)$ avec $k \geq 2$:
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_n = k-1)\mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) + \mathbb{P}(X_n = k)\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k).$$
4. Montrer alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$.
5. Donner l'espérance et la variance de X_n.

3. Probabilité de B_n où $n \in \mathbb{N}^*$

1. Justifier que :
$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}(B_n).$$
2. En déduire que $\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 – Intégrale sur un intervalle quelconque, probabilités sur un univers quelconque, variables aléatoires à densité

1. a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2^t} dt = \int_2^{+\infty} e^{-\ln(2)t} dt$ converge et déterminer sa valeur, notée α dans la suite.

   b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $x \geq 2$, on a :
$$\int_2^x \frac{t}{2^t} dt = \left[-\frac{1}{\ln(2)} \frac{t}{2^t} \right]_2^x + \frac{1}{\ln(2)} \int_2^x \frac{1}{2^t} dt.$$
   En déduire que l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} \frac{t}{2^t} dt$ converge et donner sa valeur.

2. On considère la fonction g définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par
$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} \frac{t}{2^t} & \text{si } t \geq 2 \\ 0 & \text{si } t < 2 \end{cases}$$
   a) Montrer que g est une densité de probabilité.

   Soit X une variable aléatoire admettant g pour densité.

   b) Déterminer la fonction de répartition de X.

   c) Montrer que X admet une espérance et donner sa valeur.

   d) On pose $Y = -2X$.

   Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.