Devoir Surveillé n°1

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

Conseils :

1. Lire tout le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Le DS est long, comme ce sera le cas des sujets de concours. Le barème est sur plus de 20. Pas besoin de tout faire parfaitement pour avoir une bonne note, il ne faut donc pas stresser.
3. La partie question de cours est obligatoire, l'absence de son traitement (ou un trop mauvais traitement) entraînera une minoration de la note.
4. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
5. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 (Quelques calculs pour s'échauffer)

Simplifier au maximum l'un des deux calculs suivants (le premier est pus facile mais vaut 0.5 pt, le deuxième vaut 1pt) :

$$\frac{5^{n+1}(7n+1)}{7^{n+1}} - \frac{5^n(5n+2)}{7^n};$$

$$\frac{35^{2n+3}(63n-9)}{45^{2n+1}} - \frac{49^{n+2}(25n-5)}{81^n}.$$

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{9x^2-42x+49}{121x^2-64} \geq \frac{6x-14}{11x-8}.$$

Exercice 2 (Question de cours, 5 points)

— Rappeler, et démontrer, la formule

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \cdots$$

— Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

— Donner la définition d'être injective pour une fonction f, puis donner sa contraposée et la négation de cette proposition.

Exercice 3 En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

1. $|x-4| = x+1$
2. $\sqrt{3x+6} = x+2$.
3. $\ln(x^2-5) - \ln(5x-11) = 0$.
4. $2e^{3x} - 2e^{2x} = 24e^x$.

Exercice 4 Calculez les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, donnez une conjecture sur la valeur de u_n et démontrez la par récurrence.

1. $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} &= (n+1)\left((u_n - n)^2 + 1\right) \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 &= 1, \\ u_1 &= 2, \\ \forall n \geq 0, u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n - n \end{cases}$

Exercice 5 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, que l'on notera D_f.
2. (a) Montrez que pour tout $x \in D_f$, $f(x)^2 = 2x + 2|x-1|$.
   (b) En déduire $f(x)$ pour $x \geq 1$ et pour $x \leq 1$.
3. Déterminez les antécédents de $\sqrt{2}$, de 1 et de 2.
4. f est-elle injective ? Déterminez F pour que $f : D_f \mapsto F$ soit surjective.

Exercice 6 On considère une population de 40 chats, qui sont soit mâle, soit femelle, et soit noir, soit blanc. On considère les assertions suivantes :
A : "Tous les mâles sont noirs."
B : "Il existe un mâle noir et une femelle noire."

1. Écrire A sous la forme d'une implication et donner sa contraposée.
2. Écrire les négations de A et de B, notées $\bar{A}$ et $\bar{B}$.
   Vous pouvez traiter cette question en français, ou poser C l'ensemble des chats, M l'ensemble des mâles, et N l'ensemble des chats noirs, et traiter la question en utilisant des quantificateurs et les lois de Morgan.
3. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier votre réponse.
   (a) Pour prouver que A est fausse, il est nécessaire de vérifier que tous les mâles sont blancs.
   (b) Pour prouver que A est fausse, il suffit de vérifier que tous les mâles sont blancs.
   (c) Pour prouver que A est vraie, il suffit de vérifier que tous les chats blancs sont des femelles.
   (d) Pour prouver que B est vraie, il faut trouver une femelle noire.
   (e) Pour prouver que B est vraie, il suffit de trouver une femelle noire.
   (f) Pour prouver que B est fausse, il suffit de vérifier que les 40 chats sont blancs.

Exercice 7

L'objectif de cet exercice est de calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Justifiez que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
2. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on a l'égalité : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
3. Démontrez enfin que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Exercice 8 On considère la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers définie par $G_0 = 0, G_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : G_{n+1} = G_{n-1} + 2G_n$. On considère par ailleurs la suite de réels donnée par (on admettra que cette définition ne pose pas de problème) :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{Si} n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2} \end{cases}$$

1. Donner l'expression de G_n en fonction de n.
2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{G_n}{G_{n+1}}$$
3. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:
$$G_{n+3} = 5G_{n+1} + 2G_n.$$
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : G_{3n}$ est un multiple de 5 .
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : G_{4n}$ est un multiple de 12 .

Problème - A partir du telescopage

Partie 1 : exercice du cours

1. Soit (u_n) une suite, soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $n \geq p$.
   On pose $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - u_k$.
   Montrez (sans utiliser l'écriture en extension) que
$$S_n = u_{n+1} - u_p$$
2. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
   (a) Déterminez deux nombres réels A et B (fixés) tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$
   (b) En déduire la valeur de S_n en fonction de n.

Partie 2 : Somme dérivée géométrique

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Soit $T_n = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

3. (a) Calculez et simplifiez au maximum $(x-1)T_n$ (on pourra faire un glissement d'indice pour faire apparaître un télescopage).
   (b) En déduire T_n.
4. On se propose de calculer la somme T_n de la question 3 d'une autre façon.
   Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(a) Déterminez l'ensemble de définition de f.

(b) Calculez la dérivée de f, notée f'. On rappelle la formule de dérivation

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

(c) Justifiez (sans utiliser la formule obtenue à la question 3) que $f'(x) = T_n$ et en déduire la valeur de T_n.

Partie 3 : une suite et une somme telescopique

5. (a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2$?

(c) Calculez $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2}$.

6. Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= 2u_n + n(n-1)2^n \end{cases}$

On pose $v_n = \dfrac{u_n}{2^n}$.

(a) Justifiez que $v_{n+1} = v_n + \dfrac{n(n-1)}{2}$.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = R_n$ (où R_n est la somme de la question précédente)

(c) Conclure en montrant que $u_n = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 2n + 6}{6} \times 2^n$