DS 7 - Variables aléatoires discrètes, applications linéaires en dimension infinie, intégrale généralisée, compléments d'analyse.
Version Dure

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
2. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
3. Ce devoir est plus difficile que ceux abordés jusqu'ici à mon avis. Ne vous découragez pas, et faites au mieux !

Questions de cours

1. Redonner sans démonstration espérance et variance des lois de Poisson et Géométrique. Démontrer le résultat dans le cas de la variance de Poisson et de l'espérance géométrique.
2. Énoncer le théorème du rang
3. Énoncer Taylor avec reste intégral.

Exercice 1 - Développements limités.

Déterminer les limites suivantes en 0 :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-\sin x}{\cos x - 1}$
3. $\lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{\cos(t)}{\sin^2(t)}$

Exercice 2 - Intégration généralisée (Ecricome 2009)

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x)=\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Domaine de définition de f.*
   a) Justifier que pour tout réel $a>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$ est convergente et donner sa valeur.
   b) Soit x un réel fixé. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t$.
   c) En déduire le domaine de définition de f puis déterminer sa parité.
2. *Étude de f au voisinage de $+\infty$.*
   a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :
   $$xe^t \le \sqrt{1+x^2e^{2t}} \le xe^t+\frac{e^{-t}}{2x}.$$
   b) Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\quad x\le f(x)\le x+\dfrac{1}{6x}$.

c) Déterminer alors la limite de f en $+\infty$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

3. *Dérivabilité et monotonie de f.*
   a) À l'aide du changement de variable $u = xe^t$ que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :
   $$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} \mathrm{d}u.$$
   b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif, par :
   $$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$
   c) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :
   $$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$
   En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

4. *Étude locale de f et f' en 0.*
   a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :
   $$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u$$
   et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u$ est convergente.
   b) À l'aide des questions précédentes, montrer alors que l'on a :
   $$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x \ln x \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2 \ln x}{2}.$$

Exercice 3 - Formules de Taylor

Soit F et G deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\, dt$ est convergente.
2. Montrer que pour tout réel x, $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-t}\, dt$ existe.
3. À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que $G(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)e^{-t}}{t}\, dt$ existe.
5. Montrer que pour tout $(t, x, h) \in \mathbb{R}^3$,
   $$|\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)| \leq \frac{t^2h^2}{2}.$$
6. Soit $(x, h) \in \mathbb{R}^2$. Majorer $\left|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right|$ en fonction de h.
7. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = G(x)$.
8. En déduire l'expression de F.

Problème (EML 2018)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, x, \ldots, x^n)$ la base canonique de E.

On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}x(1-x)P' + xP.$$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes.

1. a) Montrer que φ est une application linéaire.
   b) Calculer $\varphi(x^n)$.
   c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
3. L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.
4. On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $P_k = x^k(1-x)^{n-k}$.
   a) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.
   b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.
   c) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.

Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

5. On note, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k-ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.

   On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

   a) Déterminer la loi de Z_2.
   b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, la valeur de $P_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$.

      En déduire : $P([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \dfrac{1}{n}E(Y_k)$.
   c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :

$$P([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} P([Z_j = 1]).$$

   d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $P([Z_k = 1]) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.
   e) Déterminer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

6. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^{n} P([Y_k = i])x^i.$$

a) Déterminer les polynômes G_0, G_1 et G_2.

b) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$P([Y_{k+1} = i]) = \frac{i}{n}P([Y_k = i]) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) P([Y_k = i-1]).$$

c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_{k+1} = \frac{1}{n}x(1-x)G_k' + xG_k.$$

d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_k = \varphi^k(G_0).$$

7. a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G_k'(1)$.

b) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$E(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(Y_k) + 1.$$

c) Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $E(Y_k)$ obtenue en question 5.(e).

8. On rappelle que les polynômes $P_0, \ldots, P_n$ sont définis à la question 4 par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } [\![0, n]\!], \quad P_j = x^j(1-x)^{n-j}.$$

a) Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j$.

b) Montrer, pour tout j de $[\![0, n]\!]$:

$$P_j = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} x^i.$$

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) x^i.$$

d) Montrer finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$P([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$