La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
2. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
3. Pour la notation, j'utiliserai un barème le plus semblable possible à la notation concours. Pensez à bien tout justifier au risque de perdre beaucoup de points !

Exercice 1 - Edhec Appro 2025

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie sur $]n, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]n, +\infty[, f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n)$$

On considère aussi une fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1. a) Dresser le tableau de variations de g, limites comprises.

   b) En déduire que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k\geq 3}$ est décroissante puis que :
   $$\forall k \geq 4, \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}.$$

2. a) Justifier que f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ et donner l'expression de $f_n'(x)$ pour tout réel $x > n$.

   b) Montrer que pour tout réel $t > 0, \ln(t) \leq t - 1$. En déduire que f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

   c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n+1, n+2]$, admet une unique solution, que l'on note x_n.

3. Montrer l'équivalent suivant : $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

4. a) Justifier que :
   $$\forall n \geq 2, \ln(x_n - n) = (x_n - n)\frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - n) = 1$.

5. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2, u_n = x_n - n - 1$.

   a) Justifier que :
   $$\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \text{ et } \ln(1+n+u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

   b) Avec la question 4.(a), montrer alors que :
   $$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

6. Déterminer la nature des séries de termes généraux u_n et u_n^2.

Problème - Edhec Appro 2025

On considère la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

Le problème est décomposé en quatre parties. Dans la partie 1, on utilise l'algorithmique pour coder les termes de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$. Dans la partie 2, on obtient des estimations de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$. Dans la partie 3, à l'aide de la partie 2, on étudie une variable aléatoire. Dans la partie 4, toujours à l'aide de la partie 2, on étudie une fonction dont l'expression est donnée par une somme.

Les parties 3 et 4 sont totalement indépendantes.

On rappelle que pour une suite $(u_k)_{k\geq 0}$, $\prod_{k=1}^{0} u_k = 1$ par convention.

On rappelle aussi que si p, q sont deux entiers naturels tels que $p < q$, $[\![p; q]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre p (inclus) et q (inclus).

Partie 1

1. Justifier que pour tout entier naturel n, on a :

$$B_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k}.$$

Compléter alors le code de la fonction Python `B`, prenant en entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de B_n.

```
def B(n):
    P = ...     # Initialisation
    for k in range(....):
        P = ...
    return P
```

Partie 2

On pose pour tout entier naturel n, $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \, dt$.

2. Calculer W_0 et W_1.
3. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

5. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}.$$

6. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$W_{2n-1} = \frac{1}{2n\, B_n}.$$

7. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2n\, B_n},$$

puis :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

8. En déduire un équivalent de B_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 3

On considère dans cette section du problème une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :

$$\forall n \geq 1, \quad \mathrm{P}\big(X_n = 1\big) = \mathrm{P}\big(X_n = -1\big).$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$. Préciser son espérance et sa variance.
   b) En déduire la loi de la variable T_n définie par $T_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   c) Montrer que $S_n(\Omega) = \{2j - n,\ j \in [\![0, n]\!]\}$ et déterminer la loi de S_n.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    On définit la variable aléatoire R_n comme étant le cardinal de l'ensemble $\{k \in [\![1, 2n]\!] \,:\, S_k = 0\}$. Autrement dit, pour $\omega \in \Omega$, $R_n(\omega)$ est égal au nombre d'entiers $k \in [\![1, 2n]\!]$ tels que $S_k(\omega) = 0$.
    a) Justifier que :

$$R_n = \mathrm{Card}\Big\{k \in [\![1, n]\!] \,:\, S_{2k} = 0\Big\}.$$

    b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\mathrm{P}\big(S_{2k} = 0\big) = B_k.$$

    c) On rappelle que pour un événement A, la fonction indicatrice de A définie de Ω dans $\mathbb{R}$, notée $\mathbf{1}_A$, est définie par :

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

    On pose pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k = \{S_{2k} = 0\}$. Donner une expression de R_n à l'aide des fonctions indicatrices des événements A_k.
    d) En déduire que l'espérance de R_n est donnée par la formule :

$$\mathrm{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{n} B_k.$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$2\Big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\Big) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\Big(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\Big).$$

12. En déduire alors, à l'aide des résultats de la partie 2 puis par sommation, un équivalent de l'espérance de R_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 4

13. a) Montrer que :

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}.$$

b) En déduire que pour tout réel $x \in [0,4[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge.

Soit f la fonction définie sur $[0,4[$ par :

$$\forall x \in [0,4[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}.$$

14. Justifier que f est croissante sur $[0,4[$.
On admet dans la suite que f est continue sur $]0,4[$.

15. a) Montrer que pour tout $x \in [0,4[$ et tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n.$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in [0,4[, \quad \sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4} \times \frac{1}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x}\right).$$

Déterminer alors les limites de f en 0^+ et en 4^-. Qu'en déduit-on pour f en 0 ?

16. Montrer que pour tout réel $x \in [0,4[$, $f(x) \geq \dfrac{x}{2}$.

17. On admet que :

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{x}{2} + o(x).$$

En utilisant tous les résultats précédents, tracer l'allure précise de la courbe de la fonction f.

EDHEC Maths Approfondies 2024 1/4 sujet

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$. On a donc $u_0 = 1$.

1. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
   b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. a) Montrer que, pour tout x de $[0,1]$, on a l'inégalité : $\mathrm{e}^{x/2} \leq 1+x$.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'inégalité :

$$u_n \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2/2}\,\mathrm{d}t$$

   c) **On admet que**, pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.
   Vous pourrez retrouver ce résultat l'an prochain grâce au cours sur les lois normales.
   d) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie 2

3. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Pour toute la suite, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$$

4. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}$$

   b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
   c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
5. a) Montrer, grâce à une intégration par parties effectuée dans J_n, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = 2n\left(J_n - J_{n+1}\right)$$

   b) Déterminer J_1.
   c) Montrer que la série de terme général $\dfrac{J_n}{n}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \pi$.
   d) Utiliser la relation de la question 5a) pour compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la valeur de J_n.

```
def suiteJ(n):
    J=---
    for k in range(2,n+1):
        J=---
    return J
```

6. Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

Partie 3

On désigne par n un entier naturel non nul et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de « piles » (resp. « faces ») obtenus lors des $2n$ premiers lancers supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

7. a) Donner, en justifiant, la loi de X_n.

   b) Montrer que $P(X_n = Y_n) = \dfrac{2}{\pi} J_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = Y_n)$.

   c) Justifier sans calcul l'égalité $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$.

   d) Montrer que la probabilité d'obtenir strictement moins de « piles » que de « faces » lors de l'expérience décrite plus haut tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

8. Pour tout entier naturel k non nul, on considère la variable aléatoire Z_k qui vaut 1 si l'on a obtenu « pile » au k^e lancer et 0 sinon.

   a) Vérifier que l'on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n$.

   b) **On admet que** (application du théorème central limite à la suite $(Z_k)_{k\in\mathrm{N}^*}$)

   $$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2} \leq 0\right) = \frac{1}{2}$$

   Montrer que :

   $$\lim_{n\to+\infty} P(X_n \leq Y_n) = \frac{1}{2}$$

   c) Retrouver le résultat établi à la question 7)d).