La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
2. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
3. Pour la notation, j'utiliserai un barème le plus semblable possible à la notation concours. Pensez à bien tout justifier au risque de perdre beaucoup de points !

> *Je laisse le corrigé, qui n'est pas de moi, tel qu'il a été écrit par des collègues que je remercie (enfin, peu modifié). Cela vous fait voir d'autres rédactions, et vous pourrez voir le corrigé des questions que j'ai modifiées pour que vous puissiez faire le sujet.*

Exercice 1 - Edhec Appro 2025

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie sur $]n, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]n, +\infty[, f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n)$$

On considère aussi une fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1. a) Dresser le tableau de variations de g, limites comprises.

   b) En déduire que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k\geq 3}$ est décroissante puis que :
   $$\forall k \geq 4, \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}.$$

2. a) Justifier que f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ et donner l'expression de $f_n'(x)$ pour tout réel $x > n$.

   b) Montrer que pour tout réel $t > 0, \ln(t) \leq t - 1$. En déduire que f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

   c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n+1, n+2]$, admet une unique solution, que l'on note x_n.

3. Montrer l'équivalent suivant : $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

4. a) Justifier que :
   $$\forall n \geq 2, \ln(x_n - n) = (x_n - n)\frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - n) = 1$.

5. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2, u_n = x_n - n - 1$.

a) Justifier que :

$$\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \text{ et } \ln(1+n+u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

b) Avec la question 4.(a), montrer alors que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

6. Déterminer la nature des séries de termes généraux u_n et u_n^2.

1. a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables. En appliquant la formule du quotient, on a

$$g'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}\,.$$

Le signe de $g'(x)$ dépend donc de celui de $1 - \ln x$ puisque $x^2 > 0$ pour tout $x > 0$.
Cherchons les valeurs pour lesquelles

$$1 - \ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e\,.$$

Ainsi :
— Pour $x \in]0, e[$, on a $g'(x) > 0$.
— Pour $x \in]e, +\infty[$, $g'(x) < 0$.
Déterminons les limites de g.
— Lorsque $x \to 0^+$, on a $\ln x \to -\infty$ et $x \to 0^+$. Donc,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = -\infty\,.$$

— Lorsque $x \to +\infty$, par croissance comparée

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\,.$$

On calcule :

$$g(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}\,.$$

D'après les résultats précédents, le tableau de variations de g est le suivant :

x	0^+		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

b) Pour $k \geq 3$, on remarque que $3 > e$. Or, nous avons établi que pour $x > e$, la fonction $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ est strictement décroissante. Ainsi, pour tout entier $k \geq 3$,

$$\frac{\ln k}{k} \geq \frac{\ln(k+1)}{k+1}\,,$$

ce qui montre que $\boxed{\text{la suite } \left(\frac{\ln k}{k}\right)_{k\geq 3} \text{ est décroissante.}}$

De plus, pour tout $k \geq 4$, on a :

$$\frac{\ln k}{k} \leq \frac{\ln 4}{4}\,.$$

Or, comme

$$\frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2}\,,$$

on peut écrire :

$$\boxed{\frac{\ln k}{k} \leq \frac{\ln 2}{2} \quad \text{pour tout } k \geq 4\,.}$$

2. a) Pour $x > n$, la fonction f_n est dérivable en tant que produit et composée de fonctions dérivables. On calcule alors

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \ln x + (x-n)\frac{1}{x} - \ln(x-n) - x\frac{1}{x-n} \\ &= \ln x + 1 - \frac{n}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n} \\ &= \ln x - \ln(x-n) + 1 - \frac{n}{x} - \frac{x}{x-n} \end{aligned}$$

ou encore

$$\boxed{f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + 1 - \frac{n}{x} - \frac{x}{x-n}}$$

b) Nous souhaitons démontrer que

$$\ln t \leq t-1, \quad \forall\, t > 0.$$

Pour ce faire, nous utilisons la propriété de concavité de la fonction logarithme. Nous savons que ln est concave sur $]0;+\infty[$. Ainsi, ln est en dessous de toute ces tangentes, notamment la tangente au point 1.
L'inégalité de concavité nous donne donc :

$$\ln t \leq \ln 1 + \frac{1}{1}(t-1) = t-1, \quad \forall\, t > 0.$$

Nous avons ainsi démontré que

$$\boxed{\ln t \leq t-1, \quad \forall\, t > 0,}$$

On veut montrer que $f_n'(x) < 0$ pour $x > n$. Posons $t = \dfrac{x}{x-n} > 1$ (car $x > n$).
Alors

$$f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + 1 - \frac{n}{x} - \frac{x}{x-n} = \ln t + 1 - \frac{n}{x} - t$$

Il suffit de montrer que cette expression est négative. D'après l'inégalité $\ln t \leq t-1$:

$$\ln t \leq t-1 \implies \ln t + 1 - t \leq 0$$

Comme $-\dfrac{n}{x} < 0$, on a bien $f_n'(x) < 0$.

$$\boxed{\text{Donc } f_n \text{ est strictement décroissante sur }]n,+\infty[.}$$

c) Pour $n \geq 2$, on cherche $x \in [n+1, n+2]$ tel que $f_n(x) = 0$. Nous avons d'ores et déjà montré que f_n est continue (nous avons montré dérivable) et strictement décroissante sur $[n+1, n+2]$.

Calculons $f_n(n+1)$ et $f_n(n+2)$:

$$f_n(n+1) = (n+1-n)\ln(n+1) - (n+1)\ln(1) = \ln(n+1)$$

$$f_n(n+2) = (n+2-n)\ln(n+2) - (n+2)\ln(2) = 2\ln(n+2) - (n+2)\ln 2$$

Pour $n \geq 2$, $f_n(n+1) > 0$ (car $n+1 \geq 3 > 1$). De plus, en utilisant la question 1.b), comme $n \geq 2 \Rightarrow (n+2) \geq 4$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{ln(n+2)}{n+2} \leq \frac{\ln(2)}{2} &\Leftrightarrow 2\ln(n+2) \leq (n+2)\ln(2) \\ &\Leftrightarrow 2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow f_n(n+2) \leq 0 \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de la bijection,

il existe une unique solution $x_n \in [n+1, n+2]$ telle que $f_n(x_n) = 0$.

3. Nous avons montré à la question précédente que

$$n+1 \leq x_n \leq n+2 \Longleftrightarrow \frac{n+1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{n+2}{n}$$

Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n} = 1$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$, ce qui montre

$$\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} n.}$$

4. a) Par définition, $f_n(x_n) = 0$:

$$\begin{aligned} (x_n - n)\ln x_n - x_n \ln(x_n - n) = 0 &\implies (x_n - n)\ln x_n = x_n \ln(x_n - n) \\ &\implies \frac{(x_n - n)\ln x_n}{x_n} = \ln(x_n - n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \geq 2, \quad \ln(x_n - n) = (x_n - n)\frac{\ln x_n}{x_n}.}$$

b) Comme $x_n \sim n$, on se doute que la limite de $\dfrac{\ln(x_n)}{x_n}$ est 0 mais on ne peut pas invoquer directement une croissance comparée.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x_n)}{x_n} &= \frac{\ln\left(n\frac{x_n}{n}\right)}{x_n} \\ &= \frac{\ln(n)}{x_n} + \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{x_n} \\ &= \frac{\ln(n)}{n} \times \frac{n}{x_n} + \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{x_n} \end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{x_n} = 1$ par équivalence, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Donc par quotient, produit et somme de limite,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0}$$

Utilisons la relation précédente :

$$\ln(x_n - n) = (x_n - n)\frac{\ln x_n}{x_n}$$

Remarquons que pour $n \geq 2$, $1 \leq x_n - n \leq 2$. On a donc l'inégalité

$$|\ln(x_n - n)| \leq 2\frac{\ln x_n}{x_n}$$

D'après le résultat précédent et le théorème d'encadrement, la suite $(\ln(x_n - n))_{n\geq 2}$ converge vers 0. En composant par l'exponentielle, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (x_n - n) = 1}$$

5. a) On remarque à l'aide de la question précédente que $u_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. En utilisant les relation d'équivalence usuelles,

$$\boxed{\ln(1 + u_n) \sim_{n\to+\infty} u_n.}$$

Remarquons d'abord que puisque $u_n \to 0$, on a l'équivalence :

$$1 + n + u_n \sim n \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

En effet, la contribution de 1 et celle de u_n sont négligeables devant n pour n grand. Nous obtenons ainsi

$$\frac{1 + n + u_n}{n} \to 1 \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

La fonction logarithme étant continue et strictement croissante, il vient que

$$\ln(1 + n + u_n) = \ln n + \ln\left(\frac{1 + n + u_n}{n}\right) \sim \ln n,$$

puisque

$$\ln\left(\frac{1 + n + u_n}{n}\right) \to \ln 1 = 0.$$

Nous avons ainsi justifié que

$$\boxed{\ln(1 + u_n) \sim_{n\to+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \ln(1 + n + u_n) \sim_{n\to+\infty} \ln n.}$$

b) D'après la question 4.(a) :

$$\ln(x_n - n) = (x_n - n)\frac{\ln x_n}{x_n}$$

Comme $x_n - n = 1 + u_n$, nous avons montré à la question 5.(a) les résultats $\ln(x_n - n) \sim u_n$ et $\ln x_n \sim \ln n$. Nous avons enfin démontré que $x_n \sim n$ (question 3) et que $x_n - n \sim 1$ (question 4.(b)). En utilisant tout ces résultats

$$u_n \sim \ln(x_n - n) \sim (x_n - n)\frac{\ln(x_n)}{x_n} \sim 1 \times \frac{\ln(n)}{n}$$

Par transitivité des équivalents,

$$\boxed{u_n \sim \frac{\ln n}{n}.}$$

6. D'après la question précédente,

$$u_n \sim \frac{\ln n}{n}.$$

Donc étudier la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ reviens à étudier la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n}{n}$. On va comparer cette série à une intégrale.

Soit $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq k \geq 3$ et $x \in [k, k+1]$. La fonction $x \to \frac{\ln(x)}{x}$ étant décroissante (question 1.(a)), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\ln(k)}{k} &\Leftrightarrow \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \\
&\Rightarrow \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&\Rightarrow \int_3^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}
\end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles. On calcule alors l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_3^{n+1} \frac{\ln(x)}{x} dx &= \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_3^{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln(n+1)^2 - \frac{\ln(3)^2}{2} \to +\infty
\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$ diverge. Par comparaison de suite, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n}{n}$ diverge.

Étant donné que $u_n \sim \frac{\ln n}{n}$, les deux séries présentent le même comportement pour $n \to \infty$. On en déduit que :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ diverge.}}$$

Comme $u_n \sim \frac{\ln n}{n}$, on a en élevant au carré :

$$u_n^2 \sim \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 = \frac{(\ln n)^2}{n^2}.$$

Pour étudier la série $\sum_{n\geq 2} u_n^2$, nous étudierons la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^2}{n^2}$.

Nous avons

$$\frac{(\ln(n))^2}{n^2} \times n^{3/2} = \frac{(\ln(n))^2}{\sqrt{n}}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^2}{\sqrt{n}} = 0$ par croissance comparée. Donc $\frac{(\ln(n))^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente car $\frac{3}{2} > 1$. Par comparaison de séries à termes positifs (négligeabilité), la série

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^2}{n^2}$$

converge. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs (équivalence) on en déduit :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n^2 \text{ converge.}}$$

Problème - Edhec Appro 2025

On considère la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

Le problème est décomposé en quatre parties. Dans la partie 1, on utilise l'algorithmique pour coder les termes de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$. Dans la partie 2, on obtient des estimations de la suite $(B_n)_{n\geq 0}$. Dans la partie 3, à l'aide de la partie 2, on étudie une variable aléatoire. Dans la partie 4, toujours à l'aide de la partie 2, on étudie une fonction dont l'expression est donnée par une somme.

Les parties 3 et 4 sont totalement indépendantes.

On rappelle que pour une suite $(u_k)_{k\geq 0}$, $\prod_{k=1}^{0} u_k = 1$ par convention.

On rappelle aussi que si p, q sont deux entiers naturels tels que $p < q$, $[\![p; q]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre p (inclus) et q (inclus).

Partie 1

1. Justifier que pour tout entier naturel n, on a :

$$B_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k}.$$

Compléter alors le code de la fonction Python `B`, prenant en entrée un entier naturel n et qui renvoie la valeur de B_n.

```
def B(n):
    P = ...     # Initialisation
    for k in range(....):
        P = ...
    return P
```

Partie 2

On pose pour tout entier naturel n, $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \, dt$.

2. Calculer W_0 et W_1.
3. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$
5. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}.$$
6. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$W_{2n-1} = \frac{1}{2n\, B_n}.$$
7. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2n\, B_n},$$
puis :
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$
8. En déduire un équivalent de B_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 3

On considère dans cette section du problème une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :
$$\forall n \geq 1, \quad \mathrm{P}\big(X_n = 1\big) = \mathrm{P}\big(X_n = -1\big).$$
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$. Préciser son espérance et sa variance.
   b) En déduire la loi de la variable T_n définie par $T_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   c) Montrer que $S_n(\Omega) = \{2j - n,\ j \in [\![0, n]\!]\}$ et déterminer la loi de S_n.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    On définit la variable aléatoire R_n comme étant le cardinal de l'ensemble $\{k \in [\![1, 2n]\!] \,:\, S_k = 0\}$. Autrement dit, pour $\omega \in \Omega$, $R_n(\omega)$ est égal au nombre d'entiers $k \in [\![1, 2n]\!]$ tels que $S_k(\omega) = 0$.
    a) Justifier que :
$$R_n = \mathrm{Card}\Big\{k \in [\![1, n]\!] \,:\, S_{2k} = 0\Big\}.$$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\mathrm{P}\big(S_{2k} = 0\big) = B_k.$$

c) On rappelle que pour un événement A, la fonction indicatrice de A définie de Ω dans $\mathbb{R}$, notée $\mathbf{1}_A$, est définie par :

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k = \{S_{2k} = 0\}$. Donner une expression de R_n à l'aide des fonctions indicatrices des événements A_k.

d) En déduire que l'espérance de R_n est donnée par la formule :

$$\mathrm{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{n} B_k.$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$2\Big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\Big) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\Big(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\Big).$$

12. En déduire alors, à l'aide des résultats de la partie 2 puis par sommation, un équivalent de l'espérance de R_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 4

13. a) Montrer que :

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}.$$

b) En déduire que pour tout réel $x \in [0, 4[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge.

Soit f la fonction définie sur $[0, 4[$ par :

$$\forall x \in [0, 4[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}.$$

14. Justifier que f est croissante sur $[0, 4[$.
On admet dans la suite que f est continue sur $]0, 4[$.

15. a) Montrer que pour tout $x \in [0, 4[$ et tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\sqrt{\pi}\Big(\frac{x}{4}\Big)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}(n+1)\Big(\frac{x}{4}\Big)^n.$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in [0, 4[, \quad \sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4} \times \frac{1}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x}\right).$$

Déterminer alors les limites de f en 0^+ et en 4^-. Qu'en déduit-on pour f en 0 ?

16. Montrer que pour tout réel $x \in [0, 4[$, $f(x) \geq \dfrac{x}{2}$.

17. On admet que :

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{x}{2} + o(x).$$

En utilisant tous les résultats précédents, tracer l'allure précise de la courbe de la fonction f.

Partie 1

1. On rappelle que

$$B_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

On a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\frac{k+n}{k} &= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{1\cdot 2\cdots n}\\ &= \frac{\frac{(2n)!}{n!}}{n!}\\ &= \frac{(2n)!}{n!n!}\\ &= \binom{2n}{n} \quad \text{d'après la formule des coefficients binomiaux}\end{aligned}$$

donc

$$B_n = \frac{1}{4^n}\prod_{k=1}^{n}\frac{k+n}{k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+n}{4k}$$

$$\boxed{B_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+n}{4k}}$$

Code Python :

```
def B(n):
    P = 1
    for k in range(1, n+1):
        P = P * (k+n)/(4*k)
    return P
```

Partie 2

On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt$. Remarquons que la fonction $t \to \sin^n(t)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'intégrale W_n est bien définie pour tout n

2. On calcule $W_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,dt = [t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$

$W_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$

$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = 1}$$

3. **Décroissance de (W_n) :**
Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $0 \le \sin t \le 1$, donc en multipliant par $\sin^n t$ de chaque côté,

$$\forall n,\ \sin^{n+1} t \le \sin^n t \implies W_{n+1} \le W_n$$

par croissance de l'intégrale ($\frac{\pi}{2} > 0$), on a

$$\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$$

4. On applique une intégration par parties à l'intégrale W_{n+2}.

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \cdot \sin t \, dt$$

Posons :

$$\begin{aligned} u = \sin^{n+1}(t) \qquad &\Rightarrow \qquad v'(t) = \sin t \, dt \\ u' = (n+1)\sin^n t \cos t \qquad &\Rightarrow \qquad v = -\cos t \end{aligned}$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \cdot \sin t \, dt \\ &= \left[-\sin^{n+1} t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot (n+1)\sin^n t \cos t \, dt \\ &= \left[-\sin^{n+1} t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t \, dt \end{aligned}$$

— Pour $t = 0$, $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1 \implies \sin^{n+1}(0)\cos(0) = 0$

— Pour $t = \frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0 \implies \sin^{n+1}(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

On obtient donc :

$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \cos^2 t \, dt$$

Mais,

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$$

donc

$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t(1 - \sin^2 t) \, dt = (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \, dt\right)$$

$$= (n+1)\left(W_n - W_{n+2}\right)$$

On regroupe les W_{n+2} :

$$W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$

$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n}$$

5. Soit n un entier naturel. On va montrer par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n$: $\{W_{2n} = \frac{\pi}{2}B_n \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}\}$

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$. D'un autre côté, $B_0 = 1$ donc $W_0 = \dfrac{\pi}{2} B_0$ et $W_1 = \dfrac{1}{(0+1)B_0}$.
  On a vérifié que $\mathcal{P}_0$ est vraie
- Hérédité : On suppose que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n. On a d'une part

$$\begin{aligned}
W_{2(n+1)} = W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2} W_n \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{2n+1}{2(n+1)} \frac{\pi}{2} B_n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{2n+1}{2(n+1)} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{4k} \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{(2n+1) \times 2n \times \ldots \times (n+1)}{2(n+1) \times 4n \times \ldots \times 4} \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{(2n+2) \times (2n+1) \times 2n \times \ldots \times (n+2)}{4(n+1) \times 4n \times \ldots \times 4}
\end{aligned}$$

  en remarquant que

$$\frac{n+1}{2(n+1)} = \frac{2(n+1)}{4(n+1)} = \frac{2n+2}{4(n+1)}.$$

  On obtient alors

$$W_{2(n+1)} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+n+1}{4k} = \frac{\pi}{2} B_{n+1}$$

  D'autre part, on obtient

$$\begin{aligned}
W_{2(n+1)+1} = W_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \\
&= \frac{2n+2}{(2n+3)(2n+1)} \frac{1}{B_n} \\
&= \frac{2n+2}{(2n+3)(2n+1)} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k}{k+n} \\
&= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k}{k+n} \\
&= \frac{1}{2n+3} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{4k}{k+n+1} \\
&= \frac{1}{(2n+3)B_{n+1}}
\end{aligned}$$

  Ainsi la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. La suite de proposition est héréditaire.
- Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}.}$$

6. En utilisant la question précédente, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)B_{n-1}}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} W_{2n-1} &= \frac{1}{(2n-1)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{4k}{k+n-1} \\ &= \frac{4 \times \ldots \times 4(n-1)}{(2n-1) \times 2n-2 \times \ldots \times n} \\ &= \frac{4 \times \ldots \times 4(n-1) \times 4n}{2n \times 2n \times (2n-1) \times 2n-2 \times \ldots \times (n+1)} \\ &= \frac{1}{2n} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k}{k+n} \\ &\boxed{= \frac{1}{2nB_n}} \end{aligned}$$

7. La suite (W_n) étant décroissante (question 3), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$$

D'après les questions précédentes, on a donc

$$\boxed{\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2n\, B_n}}$$

En multipliant par B_n, on obtient

$$\frac{1}{(2n+1)} \leq \frac{\pi}{2}(B_n)^2 \leq \frac{1}{2n} \Longrightarrow \frac{2}{\pi(2n+1)} \leq (B_n)^2 \leq \frac{1}{n\pi}$$

Or, comme $\dfrac{2}{2n+1} \geq \dfrac{1}{n+1}$, on obtient enfin en composant par la racine carrée,

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.}$$

8. En multipliant l'inégalité précédente par $\sqrt{n}$, on obtient

$$\frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{\pi n} B_n \leq \frac{\sqrt{\pi n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{\pi n} B_n \leq 1$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$. Par le théorème d'encadrement, on obtient

$$\boxed{B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.}$$

Partie 3

On considère dans cette section du problème une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :

$$\forall n \geq 1, \quad \mathrm{P}\big(X_n = 1\big) = \mathrm{P}\big(X_n = -1\big).$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Pour $k \geq 1$, on définit la variable

$$Y_k = \frac{X_k + 1}{2}.$$

Loi de Y_k :

— Si $X_k = 1$, alors $Y_k = \dfrac{1+1}{2} = 1$.

— Si $X_k = -1$, alors $Y_k = \dfrac{-1+1}{2} = 0$.

Ainsi Y_k ne prend que les valeurs 0 et 1. De plus,

$$\mathrm{P}(Y_k = 1) = \mathrm{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(Y_k = 0) = \mathrm{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Autrement dit, Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$. D'après le cours,

$$\boxed{\mathrm{E}(Y_k) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

La variance est donnée par

$$\boxed{\mathrm{Var}(Y_k) = p(1-p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.}$$

b) Posons

$$T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Remarquez que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{2}\left(X_k + 1\right) = Y_k.$$

Ainsi,

$$T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k + 1}{2} = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

Comme les Y_k sont mutuellement indépendantes (d'après le lemme des coalitions) et suivent une loi de Bernoulli($\dfrac{1}{2}$), la somme suit une loi binomiale de paramètres $(n, \dfrac{1}{2})$. Ainsi, la loi de T_n est

$$\boxed{T_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2).}$$

c) Montrons que

$$S_n(\Omega) = \{2j - n,\ j \in [\![0, n]\!]\}.$$

En effet, on a vu que

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

prend toutes les valeurs entières de 0 à n. Comme

$$S_n = 2T_n - n,$$

quand $T_n = j$, on obtient

$$S_n = 2j - n.$$

Ainsi, l'ensemble des valeurs possibles de S_n est bien $\{2j - n,\ j = 0, 1, \ldots, n\}$. Pour la loi de S_n, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\mathrm{P}(T_n = j) = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Par changement de variable (avec $s = 2j - n$), on obtient :

$$\boxed{\forall s \in \{2j - n,\ 0 \leq j \leq n\}, \quad \mathrm{P}(S_n = s) = \binom{n}{\frac{s+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit la variable aléatoire R_n comme étant le cardinal de l'ensemble $\{k \in [\![1, 2n]\!] : S_k = 0\}$. Autrement dit, pour $\omega \in \Omega$, $R_n(\omega)$ est égal au nombre d'entiers $k \in [\![1, 2n]\!]$ tels que $S_k(\omega) = 0$.

a) Montrons que l'ensemble

$$\{k \in [\![1, 2n]\!] : S_k = 0\}$$

coïncide avec

$$\{k \in [\![1, n]\!] : S_{2k} = 0\}.$$

Justification :

— Pour $k \in [\![1, 2n]\!]$, si $S_k = 0$, on doit avoir dans la somme le même nombre de 1 et de -1. Ainsi, on a nécessairement k pair. Il existe alors un entier $m \in [\![1, n]\!]$ tel que $k = 2m$.

— Réciproquement, si pour un certain m entre 1 et n, $S_{2m} = 0$, alors $2m \in [\![1, 2n]\!]$ et l'on a $S_n = 0$.

Ainsi, on peut écrire

$$\boxed{R_n = Card\{k \in [\![1, n]\!] : S_{2k} = 0\}.}$$

b) D'après la question 9(c), on a pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(S_{2k} = 0) &= \binom{2k}{\frac{0+2k}{2}} \frac{1}{2^{2k}} \\ &= \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} \\ &\boxed{= B_k} \end{aligned}$$

c) En utilisant question 10.(a), on a

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(S_{2k}=0)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}.$$

d) On en déduit que l'espérance de R_n est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(R_n) &= \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(\mathbf{1}_{A_k}\right) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) \quad \text{car } 1_{A_k} \text{ suit une loi de Bernoulli} \\ &= \sum_{k=1}^{n} B_k. \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\mathrm{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{n} B_k.}$$

11. On utilise une inégalité des accroissements finis.

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, qui est dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Par l'inégalité des accroissements finis appliquéà l'intervalle $[k, k+1]$,

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

En multipliant ces inégalités par 2, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\big) < \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Cela prouve la première inégalité :

$$2\big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\big) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Pour la seconde inégalité, on applique le même raisonnement sur l'intervalle $[k-1,k]$ (pour $k \geq 1$, avec la convention que pour $k=1$, on pourra vérifier directement) : Il existe $c \in (k-1,k)$ tel que

$$\sqrt{k}-\sqrt{k-1}=\frac{1}{2\sqrt{c}},$$

avec $\sqrt{c} \in (\sqrt{k-1},\sqrt{k})$. Ainsi :

$$\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1},$$

ou encore,

$$\frac{1}{\sqrt{k}}<2\big(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\big).$$

Ce qui prouve :

$$\boxed{2\big(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\big) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\big(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\big).}$$

12. Nous avons précédemment établi dans la Partie 2 que, pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.$$

Ainsi, pour $k \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}} \leq B_k \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}}.$$

Et en utilisant la question précédente, on obtient alors

$$2\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{\pi}} \leq B_k \leq 2\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{\pi}}.$$

En sommant ces inégalités pour $k=1$ à n, on obtient :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} B_k \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\sqrt{k-1}.$$

En reconnaissant des sommes télescopiques, nous avons,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} B_k \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

En divisant de chaque côté par $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$, puis en prenant la limite et en appliquant le théorème d'encadrement, on obtient

$$\mathrm{E}(R_n)=\sum_{k=1}^{n} B_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

Nous avons donc l'équivalent :

$$\boxed{\mathrm{E}(R_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}}$$

Partie 4

13. a) D'après la question 8, B_n est équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$. Donc

$$\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \iff \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n\pi}$$

d'où le résultat en divisant par 4^n.

$$\boxed{\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}.}$$

b) En particulier, pour tout réel $x \in [0,4[$, l'expression

$$\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\pi n}\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

On a de plus

$$\sqrt{\pi n}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \sqrt{\pi} n \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

Or, comme $\dfrac{x}{4} < 1$, la série $\displaystyle\sum \sqrt{\pi} n \left(\frac{x}{4}\right)^n$ converge comme série géométrique dérivée donc la série $\displaystyle\sum \sqrt{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi, par le critère de comparaison, la série

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \text{ converge pour tout } x \in [0,4[.}$$

Soit f la fonction définie sur $[0,4[$ par :

$$\forall x \in [0,4[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}.$$

14. Pour $0 \leq x < y < 4$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \frac{y^n}{\binom{2n}{n}},$$

puisque la dénominateur est positif et la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0,4[$. En sommant terme à terme, on obtient

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{\binom{2n}{n}} = f(y).$$

Ainsi, f est croissante sur $[0,4[$.

15. a) Pour tout $x \in [0,4[$ et tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{x^n}{4^n B_n}$$

et d'après l'inégalité de la question 7,

$$\sqrt{\pi(n+1)} \geq \frac{1}{B_n} \geq \sqrt{\pi n}$$

Ce qui donne

$$\sqrt{n\pi}\Big(\frac{x}{4}\Big)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi(n+1)}\Big(\frac{x}{4}\Big)^n$$

En appliquant alors les inégalités $\sqrt{n} \geq 1$ et $\sqrt{n+1} \leq n+1$, on obtient le résultat demandé,

$$\boxed{\sqrt{\pi}\Big(\frac{x}{4}\Big)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}(n+1)\Big(\frac{x}{4}\Big)^n.}$$

b) En sommant ces inégalités pour $n \geq 1$, on obtient :
D'une part, en reconnaissant une série géométrique,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \geq \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{x}{4}\Big)^n = \sqrt{\pi}\, \frac{\frac{x}{4}}{1-\frac{x}{4}} = \sqrt{\pi}\, \frac{x}{4-x}.$$

D'autre part, la série de droite étant convergente par comparaison,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\Big(\frac{x}{4}\Big)^n.$$

Pour évaluer la somme $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(n+1)\Big(\frac{x}{4}\Big)^n$, on remarque que cette somme se décompose en

$$\sum_{n\geq 1}(n+1)\Big(\frac{x}{4}\Big)^n = \sum_{n\geq 1} n\Big(\frac{x}{4}\Big)^n + \sum_{n\geq 1}\Big(\frac{x}{4}\Big)^n.$$

Or, pour $|u| < 1$, on a les identités classiques :

$$\sum_{n\geq 1} u^n = \frac{u}{1-u}, \quad \sum_{n\geq 1} n\, u^n = \frac{u}{(1-u)^2}.$$

En posant $u = \dfrac{x}{4}$ (notant que $x \in [0,4[$ donc $u < 1$), on a :

$$\sum_{n\geq 1}(n+1)\Big(\frac{x}{4}\Big)^n = \frac{\frac{x}{4}}{(1-\frac{x}{4})^2} + \frac{\frac{x}{4}}{1-\frac{x}{4}}.$$

Ainsi, on en déduit que

$$f(x) \leq \sqrt{\pi}\left[\frac{\frac{x}{4}}{(1-\frac{x}{4})^2} + \frac{\frac{x}{4}}{1-\frac{x}{4}}\right].$$

En réécrivant, on peut regrouper l'expression dans une forme exacte :

$$\boxed{\forall x \in [0,4[, \quad \sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi}\left(\frac{x/4}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x}\right).}$$

Limites de f en 0^+ et 4^- :

En 0^+ : Lorsque $x \to 0^+$, les termes $\dfrac{x}{4-x}$, $\dfrac{x/4}{(1-x/4)^2}$ tendent vers 0. Ainsi, par théorème d'encadrement

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

En 4^- : Dans l'inégalité inférieure,

$$f(x) \geq \sqrt{\pi}\,\frac{x}{4-x},$$

Or $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x}{4-x} = +\infty$, on a par comparaison,

$$\boxed{\lim_{x\to 4^-} f(x) = +\infty.}$$

16. Pour $x \geq 0$, chaque terme de la série définissant $f(x)$ est positif. En particulier, le premier terme (pour $n = 1$) est :

$$\frac{x^1}{\binom{2}{1}} = \frac{x}{2}.$$

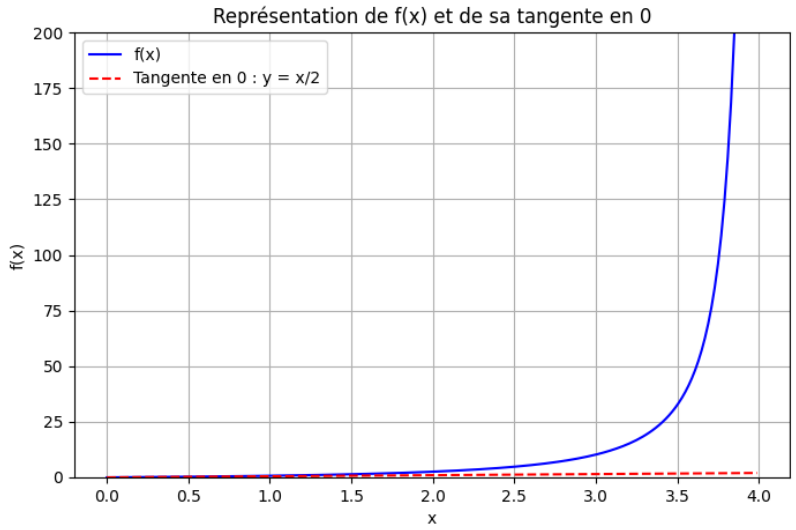
D'où

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \geq \frac{x}{2}.$$

Ainsi, nous avons bien

$$\boxed{f(x) \geq \frac{x}{2}.}$$

17.



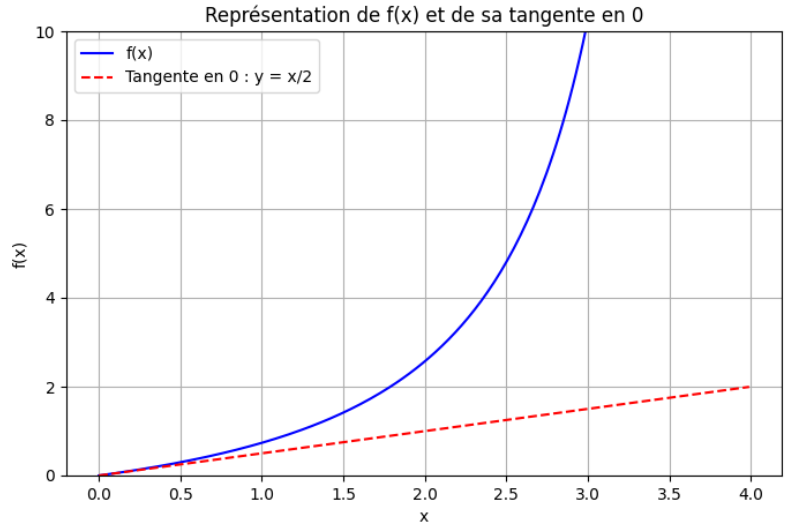


FIGURE 1 – Représentation graphique "zoomée"

EDHEC Maths Approfondies 2024 1/4 sujet

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$. On a donc $u_0 = 1$.

1. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

> Pour tout entier n, par opérations, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ (dénominateur non nul) est continue sur $[0,1]$ donc u_n est bien défini.
>
> $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \\ &= \int_0^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt\end{aligned}$$
>
> et pour tout $t \in [0,1]$: $\dfrac{-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \leq 0$ et par croissance de l'intégration d'une fonction continue sur $[0,1]$ sur des bornes croissantes $(0 \leq 1)$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$
> Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante.
>
> Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Comme pour tout $t \in [0,1]$ on a $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \geq 0$, par positivité de l'intégration, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \geq 0$.
>
> la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

> La suite est donc décroissante et minorée par 0 donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

2. a) Montrer que, pour tout x de $[0,1]$, on a l'inégalité : $\mathrm{e}^{x/2} \leq 1+x$.

Soit $f : x \mapsto e^{x/2} - (1+x)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{x/2} - 1$ donc f' est décroissante sur $\mathbb{R}$ et
et $f'(2\ln(2)) = 0$ avec $2\ln(2) = \ln(4) \geq \ln(e) = 1$ car $4 \geq e$ d'où le tableau de signe et de variations :

x	0		1		$2\ln(2)$
variations de f'		$\searrow$		$\searrow$	0
signe de $f'(x)$		$+$			
variations de f	0	$\nearrow$			
signe de $f(x)$	0	$+$			

et $f(x) \geq 0$ sur $[0,1]$ et $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } [0,1], \text{ on a l'inégalité : } \mathrm{e}^{x/2} \leq 1+x}$

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'inégalité :

$$u_n \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2/2}\ \mathrm{d}t$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $t \in [0,1]$, $t^2 \in [0,1]$ donc, d'après la question précédente, $0 < e^{t^2/2} \leq 1+t^2$
La fonction $x \mapsto 1/x^n$ étant décroissante sur $]0,+\infty[$, $e^{-nt^2/2} \geq \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$.
Et par croissance de l'intégration de fonctions continues sur des bornes croissantes,

$$\int_0^1 e^{-nt^2/2}dt \geq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$$

et $\boxed{u_n \leq \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2/2}\ \mathrm{d}t}$

c) Donner la valeur, pour tout entier naturel n non nul, de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\ \mathrm{d}t$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $e^{-nt^2/2} = \exp\left(-\left(\dfrac{t}{1/\sqrt{n}}\right)^2/2\right)$
Et si $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$ une densité est $t \mapsto \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\dfrac{t}{1/\sqrt{n}}\right)^2/2\right)$
donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-nt^2/2}dt$ converge et vaut 1 et par linéarité d'intégrales convergentes,
$\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\ \mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$

d) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La relation de Chasles donne, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\,\mathrm{d}t$
et comme chacune de ces intégrales (de fonction positives sur des bornes croissantes) est positive,
$\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\,\mathrm{d}t.$
Comme $0 \leq u_n \leq \displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\,\mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ et que $\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
par encadrement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Partie 2

3. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Par opérations, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.
$\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}dt$, intégrale de Riemann, converge car $n \in \mathbb{N}^*$ donc $2n > 1$
Et par équivalence de fonctions positives, $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

Pour toute la suite, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$$

4. a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}$$

Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $1 + t^2 \geq t^2 > 0$ et $x \mapsto 1/x^n$ strictement décroissante sur $]0, +\infty[$
donc $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \leq \dfrac{1}{t^{2n}}$.
De plus, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}dt$ converge (Riemann) et par croissance de l'intégrale convergente de fonctions continues,

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\,\mathrm{d}t$$

et pour $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{1}{t^{2n}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{2n-1}\frac{1}{t^{2n-1}}\right]_1^A = \frac{1}{2n-1}\left(1 - \frac{1}{A^{2n-1}}\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2n-1}$$

d'où $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n-1}$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}}$

b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Comme, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n-1}$ et $\dfrac{1}{2n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

On a $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = u_n + I_n$
et chacune de ces intégrales tend vers 0 donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0}$

5. a) Montrer, grâce à une intégration par parties effectuée dans J_n, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = 2n\left(J_n - J_{n+1}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. et $A > 0$.
On intègre par parties $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ avec
$u(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n} : u'(t) = \dfrac{-n}{(1+t^2)^{n+1}} \times 2t$
$v'(t) = 1$ et $v(t) = t$
les fonctions u et v étant C^1 sur $[0, A]$, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^A - \int_0^A \frac{-2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{A}{(1+A^2)^n} - 0 + 2n\int_0^A \frac{t^2+1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t - 2n\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}dt \\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0 + 2nJ_n - 2nJ_{n-1}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = 2n\left(J_n - J_{n+1}\right)}$

b) Déterminer J_1.

$J_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^A = \arctan(A) - \arctan(0) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \pi/2$

Donc $\boxed{J_1 = \frac{\pi}{2}}$

c) Montrer que la série de terme général $\frac{J_n}{n}$ est convergente et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \pi$.

D'après b), $J_n = 2n\left(J_n - J_{n+1}\right)$ et $\frac{J_n}{n} = 2\left(J_n - J_{n+1}\right)$ donc
$\sum_{n\geq 1} \frac{J_n}{n} = \sum_{n\geq 1} 2\left(J_n - J_{n+1}\right)$ est une série télescopique.
Avec $2J_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, elle est donc convergente et sa somme est $2J_1 - 2\times 0$.
c'est à dire $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = 2\frac{\pi}{2} = \pi.}$

d) Utiliser la relation de la question 5a) pour compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la valeur de J_n.

```
def suiteJ(n):
J=---
for k in range(2,n+1):
J=---
return J
```

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = 2n\left(J_n - J_{n+1}\right)$, on a donc $J_{n+1} = J_n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$
Soit $J_k = J_{k-1}\left(1 - \frac{1}{2(k-1)}\right)$ d'où le calcul de J_n par récurrence :

```
def suiteJ(n):
    J=np.pi/2
    for k in range(2,n+1):
        J=J*(1-1/(2*(k-1)))
    return J
```

6. Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:
• pour $n = 0$ on a : $\frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{0}{0}}{4^0} = \frac{\pi}{2} = J_{1+0}$
• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ alors

$$\begin{aligned} J_{n+2} &= J_{n+1}\left(1 - \frac{1}{2\left(n+1\right)}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{2n+1}{2\left(n+1\right)} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{2n+1}{2\left(n+1\right)} \end{aligned}$$

d'autre part

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!^2(n+1)^2} = 2\binom{2n}{n}\frac{2n+1}{n+1}$$

et on retrouve bien $J_{n+2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{4^n}\frac{1}{4}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2(n+1)}{n+1}$

• Par récurrence, on a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}}$

Partie 3

On désigne par n un entier naturel non nul et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de « piles » (resp. « faces ») obtenus lors des $2n$ premiers lancers supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

7. a) Donner, en justifiant, la loi de X_n.

X_n est le nombre de « piles »en $2n$ expériences indépendantes. Par équiprobabilité de pile et face, elles ont toutes la même probabilité $1/2$ de donner pile.
Donc $\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, 1/2)}$

b) Montrer que $P(X_n = Y_n) = \frac{2}{\pi}J_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = Y_n)$.

Comme les lancers ne peuvent donner que pile ou face, $X_n + Y_n = 2n$, et par conséquent on a l'égalité entre les événements : $[X_n = Y_n] = [2X_n = 2n] = [X_n = n]$
avec $n \in [\![0, 2n]\!]$ on a donc $P(X_n = Y_n) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{2}{\pi}J_{n+1}$ d'après la question 6.
Et comme $J_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = Y_n) = 0}$

c) Justifier sans calcul l'égalité $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$.

Comme pile et face jouent des rôles symétriques, la probabilité qu'il y ait plus de pile que de face est la même que celle qu'il y ait plus de face que de pile et $\boxed{P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)}$

d) Montrer que la probabilité d'obtenir strictement moins de « piles » que de « faces » lors de l'expérience décrite plus haut tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$([X_n < Y_n], [X_n = Y_n], [X_n > Y_n])$ est un système complet d'événements.
Donc la somme des leurs probabilité vaut 1 et avec $P(X_n < Y_n) = P(X_n > Y_n)$, on a donc $2P(X_n < Y_n) + P(X_n = Y_n) = 1$
et $P(X_n < Y_n) = \frac{1}{2}(1 - P(X_n = Y_n)) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$
Donc $\boxed{\text{la probabilité d'avoir strictement plus de piles que de faces tend vers } 1/2}$

8. Pour tout entier naturel k non nul, on considère la variable aléatoire Z_k qui vaut 1 si l'on a obtenu « pile » au k^e lancer et 0 sinon.

a) Vérifier que l'on a $\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n$.

Z_k vaut 1 si l'on a obtenu « pile » au k^e lancer et 0 donc Z_k compte le nombre de pile obtenu lors du $k^{ième}$ lancer.
Le nombre total de pile(s) obtenus lors de $2n$ premiers lancers est donc
$\boxed{X_n = \sum_{k=1}^{2n} Z_k}$

b) En appliquant le théorème limite central à la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n \leq Y_n) = \frac{1}{2}$$

Les $Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ sont des variables indépendantes ayant toutes la même loi avec une variance $V(Z_k) = \frac{1}{4}$ non nulle.
Leur moyenne empirique est $\overline{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k$, d'espérance $\frac{1}{2}$, de variance $\frac{1}{n^2}\frac{n}{4} = \frac{1}{4n}$ par indépendance.
La centrée réduite $\overline{Z}_n^* = \sqrt{4n}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k - \frac{1}{2}\right]$ converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite.
En particulier les termes d'indices pairs $\overline{Z}_{2n}^* = 4\sqrt{n}\left[\frac{1}{2n}X_n - \frac{1}{2}\right]$
Avec $Y_n = 2n - X_n$, on a $[X_n \leq Y_n] = [X_n \leq n] = \left[\frac{X_n}{2n} \leq \frac{1}{2}\right] = \left[\overline{Z}_{2n}^* \leq 0\right]$
On a finalement, $\boxed{P(X_n \leq Y_n) = P\left(\overline{Z}_{2n}^* \leq 0\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(0) = \frac{1}{2}}$

c) Retrouver le résultat établi à la question 7)d).

Avec $(X_n \leq Y_n) = (X_n < Y_n) \cup (X_n = Y_n)$, union disjointe on a :
$P(X_n \leq Y_n) = P(X_n < Y_n) + P(X_n = Y_n)$ et on retrouve bien
$\boxed{P(X_n < Y_n) = P(X_n \leq Y_n) - P(X_n = Y_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}}$