La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

On attend comme d'habitude une rédaction et une présentation de qualité. On prêtera attention aux justifications. Si les questions de cours ne sont pas traitées la note sera minorée.

Questions de cours

— Énoncer et prouver le résultat sur le lien entre lois binomiale et loi de Poisson
— Énoncer et démontrer le théorème du rang
— Compléter et démontrer : Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $a \in \mathbb{R}$. On a : a racine de P (c'est-à-dire ...) si et seulement si ...

Exo maison proche du cours

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (3x - 2y - z, y, 2x - 2y, y + 2t)$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
3. Soit le polynôme $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Calculer $P(f)$.
4. En déduire que f est un automorphisme et donner une expression analytique de f^{-1}.
5. Déterminer pour tout $n \geq 2$ le reste par la division euclidienne de x^n par $P(x)$.
6. En déduire qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que vous préciserez, telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a_n f + b_n id_{\mathbb{R}^4}$$
7. En déduire la matrice de f^n dans la base canonique.
8. On va retrouver ce résultat avec le dernier chapitre.
   a) Déterminer les éléments propres de f.
   b) Donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ constituée de vecteurs propres pour f.
   c) Donner la matrice de f^n dans cette base.
   d) Donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ et son inverse.
   e) En utilisant la formule de changement de base pour les applications linéaires, retrouver la matrice de f^n dans la base canonique.

Ecricome Appli 2025 Exercice 1 (1/4 de sujet)(remanié)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On note 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note E_C l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = 0_3$.

1. Déterminer les ensembles E_{0_3} et E_{I_3}.
2. Montrer que, pour toute matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit M une matrice de E_A.
   Montrer que ${}^tM$ appartient à E_A.
4. a) Calculer A^2 et A^3.
   b) Soit λ un réel.
   Montrer que si λ est valeur propre de A alors :
   $$\lambda^3 - 9\lambda = 0.$$
   c) Déterminer les éléments propres de A et en déduire une base de vecteurs propres associée à A.
   d) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont classés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, telles que $D = P^{-1}AP$.
   On pourra poser f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et regarder sa matrice dans une base bien choisie.

Dans toute la suite de l'exercice, D et P désignent les matrices introduites à la question (4d).

5. Calculer P^2.
   En déduire une expression de P^{-1}.
6. a) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Montrer que N appartient à E_D si, et seulement si, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   b) En déduire une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel E_D et préciser la dimension de E_D.
7. a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$.
   Montrer que M appartient à E_A si, et seulement si, N appartient à E_D.
   b) En déduire une base de l'espace vectoriel E_A exprimée à l'aide de P et des matrices de $\mathcal{B}$.
8. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $(A+M)^2 = A^2 + M^2$.
   On ne cherchera pas à expliciter les coefficients de M.
9. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = AM + MA$.
   En utilisant certains résultats des questions précédentes, déterminer le rang de φ.

EDHEC Maths Appliquées 2024 Problème - 2/5 de sujet (remanié pour retirer les chaînes de Markov)

Dans ce problème, on identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.

On considère deux urnes A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de A étant remise dans B et la boule tirée de B étant remise dans A.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)^{\text{e}}$ épreuve.

On pose : $a_n = P(X_n = 0), b_n = P(X_n = 1), c_n = P(X_n = 2)$ et $U_n = (a_n b_n c_n)$.

Mise en place des probas

1. a) Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
   b) Déterminer la loi de X_1 et en déduire les valeurs de a_1, b_1 et c_1.
   c) Justifier rapidement que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'événements.
   d) En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de la somme $a_n + b_n + c_n$.

On admet dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les probabilités a_n, b_n et c_n sont non nulles.

2. Soit n un entier naturel non nul.
   a) Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$, pour tout $(i, j) \in [\![0, 2]\!]^2$.
   b) Écrire la matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,2]\!]^2}$, où $m_{i,j} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$, associée à cette expérience. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0 , la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifiera avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de M est égale à 1.
   c) Utiliser une formule bien connue pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

3. Vérifier que les relations trouvées à la question 2c) restent valables pour $n = 0$.

Calcul de la loi de X_n par les probas

4. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de b_{n+1} et c_{n+1}.
   b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $E(X_{n+1}) = 1$.
   c) Établir finalement la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n + 2c_n = 1$$

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on considère, pour tout entier naturel n, la matrice-ligne $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que la suite $(U_n V)_{n\in\mathbb{V}}$ est une suite géométrique et donner sa raison.
   b) Pour tout entier naturel n, en déduire explicitement $2a_n - b_n + 2c_n$ en fonction de n.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n, b_n et c_n puis donner la loi de X_n.

7. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.

a) Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que $2M^3 = M^2 + M$.

b) En déduire les valeurs propres de M et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres.

c) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que P est inversible.

d) On pose $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MP et PD, puis conclure que M est diagonalisable.

e) Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n M$$

f) En déduire la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$U_n = U_0 M^n$$

g) Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de X_n à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure).

Reprise du TD

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E = \mathbb{R}_n[x]$ et $\mathscr{B} = (1,\, x, \ldots,\, x^n)$ la base canonique de E. On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}x(1-x)P' + xP. \qquad (P' \text{ étant le polynôme dérivé de } P)$$

1. a) Montrer que φ est une application linéaire.
   b) Calculer $\varphi(x^n)$.
   c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
3. a) L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.
   b) Soit P un polynôme non nul de Ker (φ).
   Montrer que P admet 1 comme racine puis montrer que l'ordre de multiplicité de 1 est n.
   c) En déduire une base de Ker (φ).
4. On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $\quad P_k = x^k(1-x)^{n-k}$.
   a) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.
   b) Montrer que la famille $(P_0,\, P_1, \ldots,\, P_n)$ est une base de E.
   c) Donner la matrice B de φ dans cette base.

Exercice plus difficile

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, on note S_p l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n).$$

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_p,\ P$ est unique ; on le notera P_u.
2. Montrer que S_p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Montrer que ϕ, qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe P_u, est linéaire et donner une base de son noyau. Que représente son image ?
4. Donner une base de S_p (on pourra utiliser $R_k(X) = (X+1)^k - aX^k$ pour $k \in [\![0; p]\!]$).
5. Application : déterminer la suite (u_n) définie par

$$u_0 = -2 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7$$