La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

Conseils :

1. Lire tout le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Le DS est long, comme ce sera le cas des sujets de concours. Le barème est sur plus de 20. Pas besoin de tout faire parfaitement pour avoir une bonne note, il ne faut donc pas stresser.
3. La partie question de cours est obligatoire, l'absence de son traitement (ou un trop mauvais traitement) entraînera une minoration de la note.
4. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
5. Une présentation agréable sera appréciée : laisser une marge à gauche et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**

Exercice 1 (Quelques calculs pour s'échauffer)

Simplifier au maximum l'un des deux calculs suivants (le premier est pus facile mais vaut 0.5 pt, le deuxième vaut 1pt) :

$$\frac{5^{n+1}(7n+1)}{7^{n+1}} - \frac{5^n(5n+2)}{7^n};$$

$$\frac{35^{2n+3}(63n-9)}{45^{2n+1}} - \frac{49^{n+2}(25n-5)}{81^n}.$$

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{9x^2-42x+49}{121x^2-64} \geq \frac{6x-14}{11x-8}.$$

Correction :

1. Simplifions le premier calcul :

$$\frac{5^{n+1}(7n+1)}{7^{n+1}} - \frac{5^n(5n+2)}{7^n}.$$

Mettons les deux termes sur un dénominateur commun :

$$\frac{5(7n+1)5^n}{7^{n+1}} - \frac{(5n+2)5^n}{7^n} = \frac{5(7n+1)5^n - (5n+2)5^n \cdot 7}{7^{n+1}}.$$

Simplifions le numérateur :

$$5(7n+1)5^n - (5n+2)5^n \cdot 7 = 5^n(5(7n+1) - 7(5n+2)).$$

Développons :

$$5(7n+1) - 7(5n+2) = 35n + 5 - 35n - 14 = -9.$$

La simplification finale est :

$$\boxed{\frac{5^{n+1}(7n+1)}{7^{n+1}} - \frac{5^n(5n+2)}{7^n} = -\frac{9\cdot 5^n}{7^{n+1}}.}$$

2. Simplifions le deuxième calcul :

$$\frac{35^{2n+3}(63n-9)}{45^{2n+1}} - \frac{49^{n+2}(25n-5)}{81^n}.$$

Factorisons les termes :

$$\begin{aligned}\frac{35^{2n+3}(63n-9)}{45^{2n+1}} &= \frac{(5\cdot 7)^{2n+3}(63n-9)}{(5\cdot 9)^{2n+1}}\\ &= \frac{5^{2n+3}\cdot 7^{2n+3}\cdot 9\cdot(7n-1)}{5^{2n+1}\cdot 9^{2n+1}}\\ &= \frac{5^2\cdot 7^{2n+3}\cdot(7n-1)}{9^{2n}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{49^{n+2}(25n-5)}{81^n} &= \frac{(7^2)^{n+2}5(5n-1)}{(9^2)^n}\\ &= \frac{7^{2n+4}\cdot 5\cdot(5n-1)}{9^{2n}}.\end{aligned}$$

Mettons les deux termes sur un dénominateur commun :

$$\begin{aligned}\frac{5^2\cdot 7^{2n+3}\cdot(7n-1)}{9^{2n}} - \frac{7^{2n+4}\cdot 5\cdot(5n-1)}{9^{2n}} &= \frac{5^2\cdot 7^{2n+3}\cdot(7n-1) - 7^{2n+4}\cdot 5\cdot(5n-1)}{9^{2n}}\\ &= \frac{5\cdot 7^{2n+3}\left(5(7n-1)-7(5n-1)\right)}{9^{2n}}.\end{aligned}$$

Simplifions le numérateur :

$$5(7n-1) - 7(5n-1) = 2$$

La simplification finale est :

$$\boxed{\frac{35^{2n+3}(63n-9)}{45^{2n+1}} - \frac{49^{n+2}(25n-5)}{81^n} = \frac{10\cdot 7^{2n+3}}{9^{2n}}.}$$

3. Résolvons l'inéquation :

$$\frac{9x^2-42x+49}{121x^2-64} \geq \frac{6x-14}{11x-8}.$$

Commençons par faire apparaître des identités remarquables :

$$9x^2-42x+49 = (3x-7)^2,$$

$$121x^2-64 = (11x-8)(11x+8).$$

L'inéquation devient :

$$\frac{(3x-7)^2}{(11x-8)(11x+8)} \geq \frac{6x-14}{11x-8}.$$

Mettons les deux fractions sur un dénominateur commun :

$$\iff \frac{(3x-7)^2}{(11x-8)(11x+8)} - \frac{(6x-14)(11x+8)}{(11x-8)(11x+8)} \geq 0.$$

Simplifions le numérateur :

$$(3x-7)^2-(6x-14)(11x+8) = (3x-7)(3x-7-2(11x+8)) = (3x-7)(-19x-23).$$

L'inéquation devient :

$$\frac{(3x-7)(-19x-23)}{(11x-8)(11x+8)} \geq 0.$$

Pour résoudre l'inéquation

$$\frac{(3x-7)(-19x-23)}{(11x-8)(11x+8)} \geq 0,$$

nous devons déterminer les valeurs de x pour lesquelles le produit des facteurs est positif ou nul.
Les racines des facteurs sont :

$$\begin{aligned} 3x-7=0 &\implies x=\frac{7}{3},\\ -19x-23=0 &\implies x=-\frac{23}{19},\\ 11x-8=0 &\implies x=\frac{8}{11},\\ 11x+8=0 &\implies x=-\frac{8}{11}. \end{aligned}$$

Nous allons construire un tableau de signes pour analyser les signes des facteurs dans les intervalles déterminés par ces racines.

x	$-\infty$	$-\frac{23}{19}$	$-\frac{8}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$3x-7$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-19x-23$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$11x-8$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$11x+8$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(3x-7)(-19x-23)}{(11x-8)(11x+8)}$	$+$	0	$+$	0	0	$+$

D'après le tableau de signes, l'expression est positive ou nulle dans les intervalles suivants :

$$x \in \left]-\infty, -\frac{23}{19}\right] \cup \left]-\frac{8}{11}, \frac{8}{11}\right[\cup \left]\frac{7}{3}, +\infty\right[.$$

Conclusion :

$$\boxed{x \in \left]-\infty, -\frac{23}{19}\right] \cup \left]-\frac{8}{11}, \frac{8}{11}\right[\cup \left]\frac{7}{3}, +\infty\right[.}$$

Exercice 2 (Question de cours, 5 points)

— Rappeler, et démontrer, la formule

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \cdots$$

— Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

— Donner la définition d'être injective pour une fonction f, puis donner sa contraposée et la négation de cette proposition.

Exercice 3 En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

1. $|x-4| = x+1$
2. $\sqrt{3x+6} = x+2$.
3. $\ln(x^2-5) - \ln(5x-11) = 0$.
4. $2e^{3x} - 2e^{2x} = 24e^x$.

Correction :

1. Résolvons l'équation $|x-4| = x+1$.
   Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.
   Ensemble de résolution : $x \geq -1$ (car $|x-4| \geq 0$ et $x+1 \geq 0$).
   Cas 1 : $x-4 = x+1$

$$\begin{aligned} & x-4 = x+1 \\ \iff & -4 = 1 \quad \text{(impossible)} \end{aligned}$$

   Cas 2 : $-(x-4) = x+1$

$$\begin{aligned} & -x+4 = x+1 \\ \iff & 4-1 = x+x \\ \iff & 3 = 2x \\ \iff & x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

   Vérification : $\left|\frac{3}{2} - 4\right| = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$ et $x+1 = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$.
   Donc, la solution est :

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

2. Résolvons l'équation $\sqrt{3x+6} = x+2$.
Ensemble de définition : $3x+6 \geq 0$
Ensemble de résolution : $x+2 \geq 0$ donc $x \geq -2$.
Élevons les deux côtés au carré, fonction injective sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} &\sqrt{3x+6} = x+2 \\ \iff &(\sqrt{3x+6})^2 = (x+2)^2 \\ \iff &3x+6 = x^2+4x+4 \\ \iff &0 = x^2+x-2 \\ \iff &0 = (x+2)(x-1) \end{aligned}$$

Les solutions sont $x = -2$ et $x = 1$.
Vérification :
— Pour $x = -2$, $\sqrt{3(-2)+6} = \sqrt{0} = 0$ et $-2+2 = 0$.
— Pour $x = 1$, $\sqrt{3(1)+6} = \sqrt{9} = 3$ et $1+2 = 3$.
Donc, les solutions sont :

$$\boxed{x = -2 \text{ et } x = 1}$$

3. Résolvons l'équation $\ln(x^2-5) - \ln(5x-11) = 0$.
Ensemble de définition : $x^2-5 > 0$ et $5x-11 > 0$ donc $x > \sqrt{5}$ ou $x < -\sqrt{5}$ et $x > \dfrac{11}{5}$.
Simplifions l'équation :

$$\begin{aligned} &\ln(x^2-5) = \ln(5x-11) \\ \iff &x^2-5 = 5x-11 \quad \text{car ln est injective sur } \mathbb{R}_+^* \\ \iff &x^2-5x+6 = 0 \\ \iff &(x-2)(x-3) = 0 \end{aligned}$$

Les solutions sont $x = 2$ qui n'est pas dans le domaine et $x = 3$.
Vérification :
— Pour $x = 3$, $x^2-5 = 9-5 = 4$ et $5x-11 = 15-11 = 4$.
Donc, la solution est :

$$\boxed{x = 3}$$

4. Résolvons l'équation $2e^{3x} - 2e^{2x} = 24e^x$.
Ensemble de définition : $x \in \mathbb{R}$.
Divisons par $2e^x \neq 0$:

$$\begin{aligned} &2e^{3x} - 2e^{2x} = 24e^x \\ \iff &e^{2x} - e^x = 12 \\ \iff &e^{2x} - e^x - 12 = 0 \end{aligned}$$

Résolvons cette équation quadratique en posant $u = e^x$:

$$\begin{aligned} &u^2 - u - 12 = 0 \\ \iff &(u-4)(u+3) = 0 \\ \iff &u = 4 \quad \text{ou} \quad u = -3 \end{aligned}$$

Comme $u = e^x > 0$, nous avons $u = 4$.
Donc, $e^x = 4$ et $x = \ln(4)$.
Donc, la solution est :

$$\boxed{x = \ln(4)}$$

Exercice 4 Calculez les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, donnez une conjecture sur la valeur de u_n et démontrez la par récurrence.

1. $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} &= (n+1)\left((u_n - n)^2 + 1\right) \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 &= 1, \\ u_1 &= 2, \\ \forall n \geq 0, u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n - n \end{cases}$

Correction :

1. Calculons les premiers termes de la suite $\{u_n\}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} &= (n+1)\left((u_n - n)^2 + 1\right) \end{cases}$$

   — $u_0 = 0$
   — $u_1 = 1 \cdot ((0-0)^2 + 1) = 1$
   — $u_2 = 2 \cdot ((1-1)^2 + 1) = 2$
   — $u_3 = 3 \cdot ((2-2)^2 + 1) = 3$
   — $u_4 = 4 \cdot ((3-3)^2 + 1) = 4$

   Conjecture : $u_n = n$ pour tout $n \geq 0$.
   Démonstration par récurrence :
   — **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   — **Hérédité :** Supposons que pour un certain $n \geq 0$, $u_n = n$. Montrons que $u_{n+1} = n + 1$.

   $$u_{n+1} = (n+1)\left((u_n - n)^2 + 1\right) = (n+1)\left((n-n)^2 + 1\right) = (n+1)\cdot 1 = n+1$$

   La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
   Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.
   Conclusion : $\boxed{u_n = n \text{ pour tout } n \geq 0.}$

2. Calculons les premiers termes de la suite $\{u_n\}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 2 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n - n \end{cases}$$

   — $u_0 = 1$
   — $u_1 = 2$
   — $u_2 = u_1 + u_0 - 0 = 2 + 1 - 0 = 3$
   — $u_3 = u_2 + u_1 - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$
   — $u_4 = u_3 + u_2 - 2 = 4 + 3 - 2 = 5$

Conjecture : $u_n = n + 1$ pour tout $n \geq 0$.
Démonstration par récurrence :

— **Initialisation :** Pour $n = 0$ et $n = 1$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ donc la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

— **Hérédité :** Supposons que pour un certain $n \geq 0$, $u_n = n + 1$ et $u_{n+1} = n + 2$. Montrons que $u_{n+2} = n + 3$.

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n - n = (n + 2) + (n + 1) - n = n + 3$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 2$.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.
Conclusion : $\boxed{u_n = n + 1 \text{ pour tout } n \geq 0.}$

Exercice 5 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, que l'on notera D_f.
2. (a) Montrez que pour tout $x \in D_f$, $f(x)^2 = 2x + 2|x - 1|$.
   (b) En déduire $f(x)$ pour $x \geq 1$ et pour $x \leq 1$.
3. Déterminez les antécédents de $\sqrt{2}$, de 1 et de 2.
4. f est-elle injective ? Déterminez F pour que $f : D_f \mapsto F$ soit surjective.

Correction :

1. Déterminons l'ensemble de définition de f, que l'on notera D_f.
   Pour que $f(x)$ soit définie, il faut que les expressions sous les racines carrées soient non négatives :

$$x + \sqrt{2x - 1} \geq 0 \quad \text{et} \quad x - \sqrt{2x - 1} \geq 0$$

— Résolvons l'inéquation $x + \sqrt{2x - 1} \geq 0$.

Ensemble de définition : $2x - 1 \geq 0$ donc $x \geq \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} & x + \sqrt{2x - 1} \geq 0 \\ \iff & x \geq -\sqrt{2x - 1} \end{aligned}$$

Comme $\sqrt{2x - 1} \geq 0$, il suffit que $x \geq 0$. Cependant, nous devons aussi tenir compte de la condition $x \geq \dfrac{1}{2}$.
Donc, la solution de cette inéquation est :

$$\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$$

— Résolvons l'inéquation $x - \sqrt{2x - 1} \geq 0$.

Ensemble de définition : $2x - 1 \geq 0$ donc $x \geq \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} & x - \sqrt{2x - 1} \geq 0 \\ \iff & x \geq \sqrt{2x - 1} \end{aligned}$$

Ensemble de résolution : $x \geq 0$ puisque la racine est positive. Donc l'ensemble de résolution est

$$\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$$

Élevons les deux côtés au carré (fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\begin{aligned} & x^2 \geq 2x - 1 \\ \iff & x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ \iff & (x-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cette inéquation est toujours vraie pour tout x, car un carré est toujours positif ou nul. Cependant, nous devons aussi tenir compte de la condition $x \geq \frac{1}{2}$.
Donc, la solution de cette inéquation est :

$$x \geq \frac{1}{2}$$

— Intersection des solutions :
Les solutions des deux inéquations sont $x \geq \frac{1}{2}$.
Donc, la solution du système d'inéquations est :

$$\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$$

Donc, $D_f = \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$.

2. (a) Montrons que pour tout $x \in D_f$, $f(x)^2 = 2x + 2|x-1|$.

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$$

Élevons $f(x)$ au carré :

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= \left(\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{x + \sqrt{2x-1}}\right)^2 + \left(\sqrt{x - \sqrt{2x-1}}\right)^2 + 2\sqrt{(x + \sqrt{2x-1})(x - \sqrt{2x-1})} \\ &= (x + \sqrt{2x-1}) + (x - \sqrt{2x-1}) + 2\sqrt{x^2 - (\sqrt{2x-1})^2} \\ &= 2x + 2\sqrt{x^2 - (2x-1)} \\ &= 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 1} \\ &= 2x + 2\sqrt{(x-1)^2} \\ &= \boxed{2x + 2|x-1|} \end{aligned}$$

(b) Pour $x \geq 1$, $|x-1| = x - 1$ donc :

$$f(x)^2 = 2x + 2(x-1) = 2x + 2x - 2 = 4x - 2$$

Donc, $\boxed{f(x) = \sqrt{4x-2}}$ puisque $f(x) \geq 0$.

Pour $x \leq 1$, $|x-1| = 1-x$ donc :

$$f(x)^2 = 2x + 2(1-x) = 2x + 2 - 2x = 2$$

Donc, $\boxed{f(x) = \sqrt{2}.}$

3. Déterminons les antécédents de $\sqrt{2}$, de 1 et de 2.

   — Pour $\sqrt{2}$: On vient de voir que les $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ sont antécédents de $\sqrt{2}$.

   Pour $x \geq 1$:

   $$\sqrt{4x-2} = 2 \implies 4x - 2 = 2 \implies 4x = 4 \implies x = 1$$

   $\boxed{\text{Donc, tous les } x \in [\frac{1}{2}; 1] \text{ sont les antécédents de } \sqrt{2}.}$

   — Pour 1 : il n'y a que des $x \geq 1$ possibles. Pour $x \geq 1$:

   $$\sqrt{4x-2} = 1 \implies 4x - 2 = 1 \implies 4x = 3 \implies \boxed{x = \frac{3}{4}}$$

   On vérifie aisément que $\frac{3}{4}$ fonctionne, c'est donc l'unique antécédent de 1.

   — Pour 2 : On sait encore que $x \geq 1$:

   $$\sqrt{4x-2} = 2 \implies 4x - 2 = 4 \implies 4x = 6 \implies \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

   On vérifie aisément que $\frac{3}{2}$ fonctionne, c'est donc l'unique antécédent de 2

4. f est-elle injective ? Déterminons F pour que $f : D_f \mapsto F$ soit surjective.
   f n'est pas injective car plusieurs valeurs de x peuvent donner la même valeur de $f(x)$.
   Pour que f soit surjective, il faut que $F = [\sqrt{2}, \infty[$.

Exercice 6 On considère une population de 40 chats, qui sont soit mâle, soit femelle, et soit noir, soit blanc. On considère les assertions suivantes :

A : "Tous les mâles sont noirs."

B : "Il existe un mâle noir et une femelle noire."

1. Écrire A sous la forme d'une implication et donner sa contraposée.
2. Écrire les négations de A et de B, notées $\bar{A}$ et $\bar{B}$.
   Vous pouvez traiter cette question en français, ou poser C l'ensemble des chats, M l'ensemble des mâles, et N l'ensemble des chats noirs, et traiter la question en utilisant des quantificateurs et les lois de Morgan.
3. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier votre réponse.
   (a) Pour prouver que A est fausse, il est nécessaire de vérifier que tous les mâles sont blancs.
   (b) Pour prouver que A est fausse, il suffit de vérifier que tous les mâles sont blancs.
   (c) Pour prouver que A est vraie, il suffit de vérifier que tous les chats blancs sont des femelles.

(d) Pour prouver que B est vraie, il faut trouver une femelle noire.

(e) Pour prouver que B est vraie, il suffit de trouver une femelle noire.

(f) Pour prouver que B est fausse, il suffit de vérifier que les 40 chats sont blancs.

Correction :

1. — A sous forme d'implication : Si un chat est mâle, alors il est noir.
   — Contraposée de A : Si un chat n'est pas noir, alors il n'est pas mâle.
2. — $\bar{A}$: Il existe au moins un mâle qui n'est pas noir.
   — $\bar{B}$: Il n'existe pas de mâle noir ou il n'existe pas de femelle noire.
3. (a) Pour prouver que A est fausse, il est nécessaire de vérifier que tous les mâles sont blancs.
   — Faux. Il suffit de trouver un seul mâle qui n'est pas noir pour prouver que A est fausse.

   (b) Pour prouver que A est fausse, il suffit de vérifier que tous les mâles sont blancs.
   — Vrai. Il suffit en fait même de trouver un seul mâle qui n'est pas noir pour prouver que A est fausse.

   (c) Pour prouver que A est vraie, il suffit de vérifier que tous les chats blancs sont des femelles.
   — Vrai. C'est la contraposée de A.

   (d) Pour prouver que B est vraie, il faut trouver une femelle noire.
   — Vrai. Mais ce n'est pas suffisant : il faut trouver à la fois un mâle noir et une femelle noire pour prouver que B est vraie.

   (e) Pour prouver que B est vraie, il suffit de trouver une femelle noire.
   — Faux. Il faut trouver à la fois un mâle noir et une femelle noire pour prouver que B est vraie.

   (f) Pour prouver que B est fausse, il suffit de vérifier que les 40 chats sont blancs.
   — Vrai. Dans ce cas, pas de femelle noire (ni de mâle noir, d'ailleurs).

Exercice 7

L'objectif de cet exercice est de calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Justifiez que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
2. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on a l'égalité : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
3. Démontrez enfin que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Correction :

1. On a $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 0\binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

2. On a $k\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$.
3. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \\ &= \boxed{n2^{n-1}}\end{aligned}$$

Exercice 8 (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

1. Rappeler le résultat du cours sur les SRL2 et en donner une démonstration dans le cas de deux racines distinctes.
2. On va maintenant s'intéresser au cas où il n'y a qu'une racine double. On pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On pose λ la racine double du polynôme caractéristique.
   (a) Expliquer à quel endroit de la preuve précédente le fait d'avoir une racine double bloque.
   (b) Écrire les coefficients a et b en fonction de λ et en déduire que la suite $(u_{n+1} - \lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique (préciser sa raison).
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^2 u_n$.
   (d) Montrer que, pour tout n entier, on a alors :

$$(n+2)(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^{n+2} u_0.$$

   (e) Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha(n+2) \times \lambda^{n+1} + \beta\lambda^{n+2}.$$

   (On précisera la valeur de α et β en fonction des premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)
   (f) Terminer la preuve du théorème.

Correction :

1. C'est du cours
2. Je donne ici la démonstration, je vous laisse refaire le découpage en question vous-même.
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0,\ u_1$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Supposons que le polynôme caractéristique

$$X^2 - aX - b$$

   admet une unique racine (double) λ.
   Via les relations coefficients/racines, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\lambda u_{n+1} - \lambda^2 u_n.$$

c'est-à-dire :

$$u_{n+2} - \lambda u_{n+1} = \lambda u_{n+1} - \lambda^2 u_n = \boxed{\lambda(u_{n+1} - \lambda u_n).}$$

En posant $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = u_{n+1} - \lambda u_n$, on voit que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison λ :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} = \lambda W_n.}$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. On a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+2} - \lambda u_{n+1} &= \lambda u_{n+1} - \lambda^2 u_n \\ \text{Donc : } 2\ u_{n+2} - \lambda u_{n+1} &= u_{n+2} + \lambda u_{n+1} - \lambda^2 u_n \\ \text{Et : } 2\ u_{n+2} - 2\lambda u_{n+1} &= u_{n+2} - \lambda^2 u_n. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^2 u_n.} \tag{1}$$

Montrons alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^{n+2} u_0.$$

Initialisation : Pour $n = 0$. $2(u_2 - \lambda u_1) = u_2 - \lambda^2 u_0$: c'est le résultat de (1) avec $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(n+2)(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^{n+2} u_0$ et montrons que : $(n+3)(u_{n+3} - \lambda u_{n+2}) = u_{n+3} - \lambda^{n+3} u_0$. On a :

$$\begin{aligned} (n+3)(u_{n+3} - \lambda u_{n+2}) &= u_{n+3} - \lambda u_{n+2} + (n+2)(u_{n+3} - \lambda u_{n+2}) \\ &= u_{n+3} - \lambda u_{n+2} + (n+2)\lambda(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) \quad \text{car } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométric} \\ &= u_{n+3} - \lambda u_{n+2} + \lambda(u_{n+2} - \lambda^{n+2} u_0) \qquad \text{par I} \\ &= u_{n+3} - \lambda^{n+3} u_0. \end{aligned}$$

Conclusion : Par application du principe de récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) = u_{n+2} - \lambda^{n+2} u_0.}$$

On peut donc écrire, pour tout entier n :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (n+2)(u_{n+2} - \lambda u_{n+1}) + \lambda^{n+2} u_0 \\ &= (n+2)\lambda^{n+1}(u_1 - \lambda u_0) + \lambda^{n+2} u_0 \quad \text{car } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique} \\ &= \boxed{(n+2)\lambda^{n+1}\alpha + \lambda^{n+2}\beta} \end{aligned}$$

On veut maintenant prouver le théorème, c'est-à-dire montrer que :

$$\exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (A + Bn)\lambda^n.$$

On peut déjà remarquer que sous les hypothèses du théorème, $\lambda \neq 0$ car $b = -\lambda \neq 0$.
On a donc montré :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (n+2)\lambda^{n+1}\alpha + \lambda^{n+2}\beta = \boxed{\lambda^{n+2}\left(\frac{\alpha}{\lambda}(n+2) + \beta\right)}$$

ce qui est la formule annoncée avec $\boxed{A = \beta = u_0}$ et $\boxed{B = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda}.}$
Il reste à vérifier que cette formule donne u_n pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$(A + B \times 0)\lambda^0 = A = u_0$$

et

$$(A + B \times 1)\lambda^1 = \lambda A + \lambda B = \lambda u_0 + \lambda \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda} = u_1.$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (A + Bn)\lambda^n. \text{ où } A = u_0 \text{ et } B = \frac{u_1 - \lambda u_0}{\lambda}.}$$

Exercice 9 On considère la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers définie par $G_0 = 0, G_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : G_{n+1} = G_{n-1} + 2G_n$. On considère par ailleurs la suite de réels donnée par (on admettra que cette définition ne pose pas de problème) :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{Si} n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2} \end{cases}$$

1. Donner l'expression de G_n en fonction de n.
2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{G_n}{G_{n+1}}$$
3. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:
$$G_{n+3} = 5G_{n+1} + 2G_n.$$
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : G_{3n}$ est un multiple de 5 .
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : G_{4n}$ est un multiple de 12 .

1. On étudie le polynôme caractéristique de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} : X^2 - 2X - 1$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8$. Les racines sont donc $X = 1+\sqrt{2}$ et $X = 1-\sqrt{2}$. On a donc $G_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n+\beta(1-\sqrt{2})^n$. Utilisons les conditions initiales pour déterminer α et β :
   — Pour $n = 0 : G_0 = 0 \Rightarrow \alpha(1 + \sqrt{2})^0 + \beta(1 - \sqrt{2})^0 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0$.
   — Pour $n = 1 : G_1 = 1 \Rightarrow \alpha(1 + \sqrt{2})^1 + \beta(1 - \sqrt{2})^1 = 1 \Rightarrow \alpha(1 + \sqrt{2}) + \beta(1 - \sqrt{2}) = 1$.

   Résolvons ce système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = 0 \quad (1) \\ \alpha(1 + \sqrt{2}) + \beta(1 - \sqrt{2}) & = 1 \quad (2) \end{cases}$$

En substituant $\beta = -\alpha$ dans l'équation (2), on obtient :

$$\begin{aligned} &\alpha(1+\sqrt{2}) - \alpha(1-\sqrt{2}) = 1 \\ \iff &\alpha(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}) = 1 \\ \iff &\alpha(2\sqrt{2}) = 1 \\ \iff &\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

En substituant α dans l'équation (1), on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{2}}{4} + \beta = 0 \\ \iff &\beta = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ G_n = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n.}$

2. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{G_n}{G_{n+1}}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $\frac{G_0}{G_1} = 0$.

   La propriété est vraie pour $n = 0$.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \frac{G_n}{G_{n+1}}$. On a alors $u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{\frac{G_n}{G_{n+1}} + 2} = \frac{G_{n+1}}{G_n + 2G_{n+1}} = \frac{G_{n+1}}{G_{n+2}}$. **Conclusion :**Par application du principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{G_n}{G_{n+1}}.}$

3. On a, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{G_n}{G_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n}{\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^{n+1} - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^{n+1}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}} \\ &= \frac{1 - \frac{(1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n}}{1+\sqrt{2} - \frac{(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^n}} \end{aligned}$$

   On a donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}}.}$ (Dans les puissances n, des réels plus petits que 1 en valeur absolue).

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $G_{n+3} = 5G_{n+1} + 2G_n$. En utilisant la relation de

récurrence $G_{n+1} = G_{n-1} + 2G_n$, on a :

$$\begin{aligned} G_{n+3} &= G_{n+1} + 2G_{n+2} \\ &= G_{n+1} + 2(G_n + 2G_{n+1}) \\ &= G_{n+1} + 2G_n + 4G_{n+1} \\ &= 5G_{n+1} + 2G_n \end{aligned}$$

5. On va raisonner par récurrence.
Initialisation : Pour $n = 0$, $G_0 = 0$ est un multiple de 5. $G_3 = 5G_1 + 2G_0 = 5$ est aussi un multiple de 5. La propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que G_{3n} est un multiple de 5. Montrons que $G_{3(n+1)}$ est aussi un multiple de 5. On a :

$$\begin{aligned} G_{3(n+1)} &= 5G_{3n+1} + 2G_{3n} \\ &= 5G_{3n+1} + 2 \times 5k \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= 5(G_{3n+1} + 2k) \end{aligned}$$

Conclusion : Par application du principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, G_{3n} \text{ est un multiple de 5.}}$

Problème - A partir du telescopage

Partie 1 : exercice du cours

1. Soit (u_n) une suite, soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $n \geq p$.
On pose $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - u_k$.
Montrez (sans utiliser l'écriture en extension) que

$$S_n = u_{n+1} - u_p$$

2. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

   (a) Déterminez deux nombres réels A et B (fixés) tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

   (b) En déduire la valeur de S_n en fonction de n.

Partie 2 : Somme dérivée géométrique

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Soit $T_n = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

3. (a) Calculez et simplifiez au maximum $(x-1)T_n$ (on pourra faire un glissement d'indice pour faire apparaître un télescopage).
   (b) En déduire T_n.

4. On se propose de calculer la somme T_n de la question 3 d'une autre façon.
   Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

   (a) Déterminez l'ensemble de définition de f.
   (b) Calculez la dérivée de f, notée f'. On rappelle la formule de dérivation

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

   (c) Justifiez (sans utiliser la formule obtenue à la question 3) que $f'(x) = T_n$ et en déduire la valeur de T_n.

Partie 3 : une suite et une somme telescopique

5. (a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (b) Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2$?

   (c) Calculez $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2}$.

6. Soit (u_n) une suite définie par $\left\{ \begin{array}{rl} u_0 & = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = 2u_n + n(n-1)2^n \end{array} \right.$

   On pose $v_n = \dfrac{u_n}{2^n}$.

   (a) Justifiez que $v_{n+1} = v_n + \dfrac{n(n-1)}{2}$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = R_n$ (où R_n est la somme de la question précédente)

   (c) Conclure en montrant que $u_n = \dfrac{n^3 - 3n^2 + 2n + 6}{6} \times 2^n$

Correction :

Partie 1 : exercice du cours

1. On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - u_k \\ &= \sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=p}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=p+1}^{n+1} u_k - \sum_{k=p}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=p+1}^{n} u_k + u_{n+1} - \sum_{k=p+1}^{n} u_k - u_p \\ &\boxed{= u_{n+1} - u_p.} \end{aligned}$$

2. (a) On a $\dfrac{A}{k}+\dfrac{B}{k+1}=\dfrac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)}=\dfrac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$. On a donc $A+B=0$ et $A=1$. On a donc $A=1$ et $B=-1$. Donc : Donc : $\boxed{\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}}$.

   (b) On a donc $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\boxed{1-\frac{1}{n+1}}$ d'après les deux questions précédentes.

3. (a) On a

$$\begin{aligned}(x-1)T_n&=\sum_{k=1}^{n}kx^k-\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}\\&=\sum_{k=0}^{n}kx^k-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k \quad \text{glissement d'indice dans la deuxième somme, et l}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}kx^k+nx^n-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k\\&=nx^n-\sum_{k=0}^{n-1}x^k\\&=nx^n-\frac{1-x^n}{1-x}\\&=\frac{nx^n-nx^{n+1}-1+x^n}{1-x}\\&\boxed{=\frac{(n+1)x^n-nx^{n+1}-1}{1-x}}\end{aligned}$$

   (b) On a donc $\boxed{T_n=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}}$ en divisant par $x-1=-(1-x)\neq 0$.

4. (a) f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

   (b) On a $f'(x)=\dfrac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}=\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$. On a donc $f'(x)=T_n$.

   (c) On a $f(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k$.

   On a donc $f'(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kx^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}\boxed{=T_n}$ par dérivée d'une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5. (a) On montre ce résultat par récurrence, comme vu en cours.

   (b) On a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}k^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}}$.

(c) On utilise

$$\frac{k(k-1)}{2} = \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} - \frac{(n-1)n}{4} \\ &= \frac{(n-1)n(2n-4)}{12} \\ &= \boxed{\frac{(n-1)n(n-2)}{6}}.\end{aligned}$$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2u_n + n(n-1)2^n}{2^{n+1}} = \frac{u_n}{2^n} + \frac{n(n-1)}{2} = \boxed{v_n + \frac{n(n-1)}{2}}.$$

(b) On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2} = \boxed{R_n}$.

(c) On a donc

$$\begin{aligned}u_n &= 2^n v_n \\ &= 2^n(R_n + v_0) \\ &= 2^n\left(\frac{(n-1)n(n-2)}{6} + 1\right) = \boxed{\frac{n^3 - 3n^2 + 2n + 6}{6} \times 2^n}.\end{aligned}$$