La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
4. Le sujet comporte 6 pages et 8 exercices. Bon courage !

Exercice 1 (Quelques calculs pour s'échauffer) -

Simplifier au maximum

$$\frac{21^{2n+3}(6n-3)}{18^{n+2}} - \frac{77^{2n+1}(539n-11)}{242^{n+1}}$$

Indication : on pourra effectuer la division de 539 par 11.

Résoudre l'inéquation

$$\frac{36x^2-60x+25}{9x^2-4} \geq \frac{18x^2-3x-10}{9x^2+12x+4}.$$

Exercice 2 (Questions de cours)

— Donner la forme générale des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 et démontrer ce résultat dans le cas vu en cours.

— Énoncer la formule des probabilités totales en précisant bien ses hypothèses.

— Donner la formule du binôme de Pascal pour les matrices en précisant les hypothèses et la démontrer.

Exercice 3 (Des exercices proches du cours ou du DS précédent)

1. En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

   a) $|2x-3| = x+4$

   b) $\sqrt{-2x-5} = x+4.$

   c) $\ln(x^2+1) + 2\ln(2) - \ln(2x+7) = 0.$

   d) $2e^{3x} - 2e^{2x} = 24e^x.$

   e) $\ln(x^2-3x-4) \geq 0$

   f) $x+1-\sqrt{x+5} \geq 0$

2. Donnez l'expression en fonction de n du terme général des suites u_n ci dessous, et précisez la valeur de la limite de cette suite.

   a) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 3$

   b) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$

   c) $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{5}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -\frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{2}$

3. Calculez les limites des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{1+n^2+n^3}$

b) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n+1}$

c) $u_n = \dfrac{1}{n^2-3^n}\cos(n)$

d) $u_n = 2n - \sqrt{4n^2+n+1}$

4. Résoudre les systèmes ci dessous :

$$S_1 : \begin{cases} x+y+2z = 3 \\ x+2y+z = 1 \\ 2x+y+z = 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} 2x+y-z = 0 \\ x-y+z = 1 \\ x+2y-2z = -1 \end{cases}$$

5. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système ci dessous :

$$S_3 : \begin{cases} x+my &= -3 \\ mx+4y &= 6 \end{cases}$$

6. Inverser les matrices suivantes en utilisant la technique la plus adaptée :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Résoudre le système

$$\begin{cases} x-z &= m \\ -2x+3y+4z &= 1 \\ y+z &= 2m \end{cases}$$

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}$$

1. Prouver (mathématiquement) que ces suites convergent vers une limite commune l.
2. Écrire une fonction `sommeSn(n)` qui calcule S_n.
3. Écrire une fonction `convergence(n)` qui affiche les n premiers termes de S_n.
4. Écrire un programme qui donne une approximation à 10^{-6} près de l.
5. Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$$

   a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n > u_n$.

   b) Montrer que l'une des suites est croissante et l'autre décroissante.

   c) Justifier que ces deux suites tendent vers des limites l et l'.

   d) Justifier que $l = l'$.
   (Indication : on pourra raisonner par l'absurde.)

Exercice 5 (Reprise DM)
L'objectif est d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Plus précisément, on étudiera les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des fonctions $f(x) = 1+\dfrac{1}{x}$ et $g(x) = f(f(x))$.

1. On pose
$$f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}.$$
Donner l'ensemble de définition de f, puis, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et f. Justifier que u_n est bien défini pour tout entier n.
2. On pose
$$g : x \to f(f(x)).$$
Exprimer la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de g.
3. Calculer les premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, conjecturer le comportement de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Résoudre l'inéquation $g(x) - x \geq 0$.
5. Dresser le tableau de variations de g, et justifiez que, si
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
alors
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq g(x) \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
et que, si
$$x > \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
alors
$$g(x) > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
6. Étudier le sens de variation des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
7. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Si oui, vers quelle limite ? On n'attend pas de justification pour la deuxième partie de la question.
On pourra justifier plus tard la limite de ces suites quand on aura vu le chapitre sur la continuité.

Exercice 6 Dans le jeu de dés des "petits chevaux", on demande aux joueurs d'obtenir un 6 (sur un dé à 6 faces) pour sortir leur pion de l'écurie. On se propose d'étudier cette sortie de l'écurie d'un point de vue probabilité, puis d'en faire une simulation informatique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note S_k l'événement "le cheval sort de l'écurie au k-ème essai".

On note également D_k l'événement "le dé donne un 6 au $k$ieme essai".

On suppose que que le dé est équilibré, que tous les lancers sont indépendants, et que si on arrive au n-ème essai, le joueur, lassé par le jeu, triche et obtient forcément un 6.

1. On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est à dire que si le joueur arrive au 3ième essai, il triche et fait forcément un 6.
   a) Pourquoi ne peut-on pas dire $P(S_3) = 1$?
   b) Calculez $P(S_1)$.
   c) Exprimez S_2 en fonction de D_1 et D_2, et S_3 en fonction de D_1, D_2 et D_3, puis calculez $P(S_2)$ et $P(S_3)$
2. On suppose dans cette question que $n > 1$.
   Déterminez $P(S_k)$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, puis $P(S_n)$.
3. On suppose que le joueur ne triche plus. Calculez la probabilité que le cheval ne sorte jamais.
4. Dans toute cette question, on suppose qu'il n'y a pas de triche (le nombre d'essais peut donc être aussi grand que nécessaire).
   a) Corriger le programme ci-dessous afin qu'il simule la répétition de lancer d'un dé 6 faces juqu'à l'obtention d'un 6 et retourne le nombre d'essais.

```
from random import randint
def avoirunsix():
   n=1
   R=randint(1,6)
   while R!=6:
      n=n+1
   return R
```

b) On suppose que le programme de la question précédente est corrigé et chargé dans la console.

Complèter le programme ci dessous afin qu'il calcule n fois le nombre d'essais pour avoir un 6 et qu'il retourne la moyenne de ce nombre d'essais.

```
def moyenne(n):
   ....
   .... :
        ......
   return....
```

Exercice 7 (Edhec ECS 2021)

1. Question préliminaire :
   On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

   a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.

   c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité suivante :

$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$

   d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

   On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$.

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien définie et supérieur ou égal a 1 .

   b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et donner sa limite.

   c) Écrire un scipt Python qui permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.

3. Recherche d'un équivalent de u_n.

   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.

   b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   c) Utiliser la première question pour établir que : $\dfrac{u_n}{\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

4. a) Exprimer S_n en fonction de u_n.
Indication pas dans le sujet initial : on pourra calculer les premiers termes et démontrer une conjecture par récurrence.

b) Des propositions suivantes, laquelle (lesquelles) est (sont) vraies ? Justifier votre réponse.

i. $\dfrac{4S_n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ ii. $\dfrac{nS_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ iii. $\dfrac{\frac{n}{2}}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ iv. $\dfrac{2S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$

c) Compléter le script `Python` suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question 2.c) sans calculer S_n :

```
n=0
u=1   # u0=1

while u<=.........
    u=..............
    n=n+1
print(..........)
```

Exercice 8 (D'après sujet de concours)
Le sujet est constitué de deux parties liées. La seconde partie peut être traitée en admettant les résultats de la première.

Première partie Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculez $Q(x)$, le polynôme donné par le déterminant de la matrice $(A - xI_2)$.
   b) Déterminez les deux racines de Q.
2. a) Montrez que P est inversible et calculez P^{-1}.
   b) Vérifiez que la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines obtenues à la question 1.
3. a) Exprimez A en fonction de D, P et P^{-1}.
   b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$A^n = PD^nP^{-1}$$
   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Deuxième partie Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièce contiguës, notées, A, B et C.

A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B. On suppose que les déplacements de la mouche suivent le protocole suivant :

— Si à un instant n donné, la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C, alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n + 1$.
— Si à un instant n donné la mouche est dans la pièce B, elle y reste à l'instant $n + 1$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$, ou elle va dans la pièce A ou la pièce B de façon equiprobable.

Pour tout entier n, on définit l'événement A_n : "la mouche est dans la pièce A à l'instant n".
On définit de la même façon les événements B_n et C_n.
Enfin, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces événements.

1. Montrez que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{b_n}{4}, b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + c_n, \text{ et } c_{n+1} = \frac{b_n}{4}$$
2. Montrez que la suite (b_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont on précisera b_0, b_1 et la relation liant b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.
   On ne cherchera pas à déterminer cette suite avec le polynôme caractéristique
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$
   a) Vérifiez que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et montrez que $U_{n+1} = AU_n$ où A est la matrice de la première partie.
   b) Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^nU_0$
   c) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.
   d) Déterminez les expressions de a_n et c_n.
   e) Calculez les limites de chacune de ces suites