Concours Blanc

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
4. Le sujet comporte 6 pages et 8 exercices. Bon courage !

Exercice 1 (Quelques calculs pour s'échauffer) -

Simplifier au maximum

$$\frac{21^{2n+3}(6n-3)}{18^{n+2}} - \frac{77^{2n+1}(539n-11)}{242^{n+1}}$$

Indication : on pourra effectuer la division de 539 par 11.

Résoudre l'inéquation

$$\frac{36x^2-60x+25}{9x^2-4} \geq \frac{18x^2-3x-10}{9x^2+12x+4}.$$

Simplifions cette expression complexe étape par étape :

$$\begin{aligned}
&\frac{21^{2n+3}(6n-3)}{18^{n+2}} - \frac{77^{2n+1}(539n-11)}{242^{n+1}} \\
&= \frac{(3\times 7)^{2n+3}(6n-3)}{(2\times 3^2)^{n+2}} - \frac{(7\times 11)^{2n+1}(539n-11)}{(2\times 11^2)^{n+1}} \\
&= \frac{3^{2n+3}\times 7^{2n+3}\times(6n-3)}{2^{n+2}\times 3^{2n+4}} - \frac{7^{2n+1}\times 11^{2n+1}\times(539n-11)}{2^{n+1}\times 11^{2n+2}} \\
&= \frac{7^{2n+3}(6n-3)}{2^{n+2}\times 3} - \frac{7^{2n+1}(539n-11)}{2^{n+1}\times 11} \\
&= \frac{7^{2n+1}}{2^{n+1}}\left(\frac{49(2n-1)}{2} - \frac{49n-1}{1}\right) \\
&\text{car } 6n-3 = 3(2n-1) \text{ et } 539n-11 = 11(49n-1) \\
&= \frac{7^{2n+1}}{2^{n+1}}\left(49n - \frac{49}{2} - 49n + 1\right) \\
&= \frac{7^{2n+1}}{2^{n+1}}\left(1 - \frac{49}{2}\right) \\
&= -\frac{47}{2}\times\left(\frac{7}{2}\right)^{2n+1}
\end{aligned}$$

La forme la plus simple est donc : $\boxed{-\frac{47}{2}\times\left(\frac{7}{2}\right)^{2n+1}}$

L'expression de gauche :

$$\frac{36x^2-60x+25}{9x^2-4}$$

Le numérateur est une identité remarquable : $(6x-5)^2$. Le dénominateur est une dif-

férence de carrés : $(3x-2)(3x+2)$. Donc, l'expression de gauche devient :

$$\frac{(6x-5)^2}{(3x-2)(3x+2)}$$

L'expression de droite :

$$\frac{18x^2-3x-10}{9x^2+12x+4}$$

Le dénominateur est une identité remarquable : $(3x+2)^2$. Pour le numérateur, nous cherchons à factoriser $18x^2-3x-10$. En utilisant la méthode de factorisation, nous obtenons :

$$18x^2-3x-10=(3x+2)(6x-5)$$

Donc, l'expression de droite devient :

$$\frac{(3x+2)(6x-5)}{(3x+2)^2}=\frac{(3x-2)(6x-5)}{(3x-2)(3x+2)}$$

Notre inéquation est donc équivalente à :

$$\frac{6x-5}{(3x-2)(3x+2)}(6x-5-3x+2)\geq 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{(6x-5)(3x-3)}{(3x-2)(3x+2)}\geq 0.$$

Il faut alors faire un tableau de signe pour conclure :

Les valeurs critiques sont les racines des polynômes du numérateur et du dénominateur :

$$6x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{6}$$

$$3x-3=0\Leftrightarrow x=1$$

$$3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$3x+2=0\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$$

Nous plaçons ces valeurs critiques sur une droite numérique et déterminons les signes des facteurs dans chaque intervalle :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{6}$		1		$+\infty$
$(6x-5)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-3)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x-2)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(3x+2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{(6x-5)(3x-3)}{(3x-2)(3x+2)}$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$		

En conclusion, la solution de l'inéquation est :

$$x\in\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right]\cup[1,+\infty[$$

Exercice 2 (Questions de cours)

— Donner la forme générale des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 et démontrer ce résultat dans le cas vu en cours.
— Énoncer la formule des probabilités totales en précisant bien ses hypothèses.
— Donner la formule du binôme de Pascal pour les matrices en précisant les hypothèses et la démontrer.

Exercice 3 (Des exercices proches du cours ou du DS précédent)

1. En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :
   a) $|2x-3| = x+4$
   b) $\sqrt{-2x-5} = x+4$.
   c) $\ln(x^2+1) + 2\ln(2) - \ln(2x+7) = 0$.
   d) $2e^{3x} - 2e^{2x} = 24e^x$.
   e) $\ln(x^2-3x-4) \geq 0$
   f) $x+1-\sqrt{x+5} \geq 0$
2. Donnez l'expression en fonction de n du terme général des suites u_n ci dessous, et précisez la valeur de la limite de cette suite.
   a) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 3$
   b) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$
   c) $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{5}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -\frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{2}$
3. Calculez les limites des suites suivantes :
   a) $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{1+n^2+n^3}$
   b) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n+1}$
   c) $u_n = \dfrac{1}{n^2-3^n}\cos(n)$
   d) $u_n = 2n - \sqrt{4n^2+n+1}$
4. Résoudre les systèmes ci dessous :
$$S_1 : \begin{cases} x+y+2z = 3 \\ x+2y+z = 1 \\ 2x+y+z = 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} 2x+y-z = 0 \\ x-y+z = 1 \\ x+2y-2z = -1 \end{cases}$$
5. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système ci dessous :
$$S_3 : \begin{cases} x+my = -3 \\ mx+4y = 6 \end{cases}$$
6. Inverser les matrices suivantes en utilisant la technique la plus adaptée :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
7. Résoudre le système
$$\begin{cases} x - z = m \\ -2x+3y+4z = 1 \\ y+z = 2m \end{cases}$$

1. Cette partie de l'exercice est reprise telle quelle du DS précédent. Je vous remets ici la correction :
   a) Résolvons l'équation $|2x-3| = x+4$.
   Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.
   Ensemble de résolution : $x \geq -4$ (car $|2x-3| \geq 0$ donc $x+4 \geq 0$). Donc $D_R = [-4; +\infty[$

Pour $x \in D_R$:

$$\begin{aligned}
&|2x-3| = x+4 \\
\iff &2x-3 = x+4 \quad \text{ou} \quad 2x-3 = -x-4 \\
\iff &x = 7 \quad \text{ou} \quad 3x = -1 \\
\iff &x = 7 \in D_R \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{3} \in D_R
\end{aligned}$$

Donc, les solutions sont :

$$\boxed{x = 7 \text{ et } x = -\frac{1}{3}}$$

b) Résolvons l'équation $\sqrt{-2x-5} = x+4$.
Ensemble de définition : $-2x-5 \geq 0$
Ensemble de résolution : En plus du domaine de définition il faut $x+4 \geq 0$ donc $D_R = \left]-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cap [-4; +\infty[= \left[-4; -\frac{5}{2}\right]$.
Pour $x \in D_R$:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-2x-5} = x+4 \\
\iff &-2x-5 = x^2+8x+16 \qquad \text{car } x \to x^2 \text{ est injective sur } \mathbb{R}_+^* \\
\iff &0 = x^2+10x+21 \\
\iff &x = -3 \in D_R \qquad \text{ou } x = -7 \notin D_R
\end{aligned}$$

La seule solution est donc $\boxed{x = -3.}$
Ici, vous pouvez aussi faire la rédaction suivante (qui vous rassurera peut-être et évitera peut-être des erreurs) :
Ensemble de définition : $-2x-5 \geq 0$ donc $D_{Def} = \left]-\infty; -\frac{5}{2}\right]$.
Pour $x \in D_{Def}$:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{-2x-5} = x+4 \\
\implies &-2x-5 = x^2+8x+16 \quad \text{pas d'équivalence car } x \to x^2 \text{ n'est pas injective sur } \mathbb{R} \\
\iff &0 = x^2+10x+21 \\
\iff &x = -3 \qquad \text{ou } x = -7 D_R
\end{aligned}$$

Vérifions maintenant si ces deux solutions potentielles fonctionnent :

$\sqrt{-2(-3)-5} = 1 = -3+4$ fonctionne mais $\sqrt{-2(-7)-5} = 3 \neq -7+4 = -3$

La seule solution est donc $\boxed{x = -3.}$

c) Résolvons l'équation $\ln(x^2+1) + 2\ln(2) - \ln(2x+7) = 0$.
Ensemble de définition : $x^2+1 > 0$ et $2x+7 > 0$ donc $x > -\frac{7}{2}$. Pas de contrainte de résolution en plus donc
Simplifions l'équation :

$$\begin{aligned}
&\ln(x^2+1) + 2\ln(2) - \ln(2x+7) = 0 \\
\iff &\ln(4(x^2+1)) = \ln(2x+7) \\
\iff &4x^2+4 = 2x+7 \quad \text{car ln est injective sur } \mathbb{R}_+^* \\
\iff &4x^2-2x-3 = 0 \\
\iff &x = \frac{1-\sqrt{13}}{4} \in D_{Def} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1+\sqrt{13}}{4} \in D_{Def}
\end{aligned}$$

Les solutions sont donc $\boxed{x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{4} \text{ et } x = \dfrac{1\sqrt{13}}{4}.}$

d) Résolvons l'équation $2e^{3x} - 2e^{2x} = 24e^x$.
Ensemble de définition : $x \in \mathbb{R}$.
Divisons par $2e^x \neq 0$:

$$\begin{aligned} & 2e^{3x} - 2e^{2x} = 24e^x \\ \iff & e^{2x} - e^x = 12 \\ \iff & e^{2x} - e^x - 12 = 0 \end{aligned}$$

Résolvons cette équation quadratique en posant $u = e^x$:

$$\begin{aligned} & u^2 - u - 12 = 0 \\ \iff & (u-4)(u+3) = 0 \\ \iff & u = 4 \quad \text{ou} \quad u = -3 \end{aligned}$$

Comme $u = e^x > 0$, nous avons $u = 4$.
Donc, $e^x = 4$ et $x = \ln(4)$.
Donc, la solution est :

$$\boxed{x = \ln(4)}$$

e) **Ensemble de définition :** $x^2 - 3x - 4 > 0 \iff x \in]-\infty; -1[\cup]4; +\infty[$
On utilise alors la croissance de la fonction ln :

$$\begin{aligned} & \ln(x^2 - 3x - 4) \geq 0 \\ \iff & x^2 - 3x - 4 \geq 1 \quad \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \iff & x^2 - 3x - 5 \geq 0 \\ \iff & \left(x + \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)\left(x + \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Il faut comparer les valeurs obtenues aux bornes de l'intervalle de définition :

$$\begin{aligned} & 5 < \sqrt{29} < 6 \\ \text{donc } & -\frac{3}{2} < \frac{3-\sqrt{29}}{2} < -\frac{2}{2} = -1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & 5 < \sqrt{29} < 6 \\ \text{donc } & \frac{8}{2} = 4 < \frac{3+\sqrt{29}}{2} < \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Finalement, on a donc l'ensemble des solutions qui est :

$$\boxed{\left]-\infty; \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right[\bigcup \left]\frac{3+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right[}$$

2. a) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 3$

La suite est arithmétique de raison -3. Le terme général est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n \cdot (-3) = 2 - 3n$$

La limite de cette suite est :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = -\infty$$

b) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 2$

La suite est arithmético-géométrique. Pour trouver le terme général, nous résolvons l'équation de récurrence :

$$c = \frac{1}{2}c - 2 \iff c = -4$$

En posant $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + 4$, nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 5$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc, le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - 4 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$$

La limite de cette suite est :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = -4$$

c) $u_0 = 4$, $u_1 = \dfrac{5}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -\dfrac{u_{n+1}}{2} + \dfrac{u_n}{2}$

La suite est définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Pour trouver le terme général, nous résolvons l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

Les racines de cette équation sont $\dfrac{1}{2}$ et -1 (facile à trouver avec les coefficients racines ou avec la racine évidente -1).
Donc, le terme général est de la forme :

$$u_n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B\,(-1)^n\,.$$

En utilisant les conditions initiales $u_0 = 4$ et $u_1 = \dfrac{5}{2}$, nous trouvons les constantes A et B :

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ A\left(\dfrac{1}{2}\right) + B\,(-1) = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Résolvons ce système pour obtenir A et B :

$$A = \frac{13}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}$$

Les termes pairs tendent alors vers $-\frac{1}{3}$ et les impairs vers $\frac{1}{3}$ donc :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'a pas de limite.}}$$

3. a) $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{1+n^2+n^3}$

En divisant le numérateur et le dénominateur par n^3, nous obtenons :

$$u_n = \frac{\frac{n^2}{n^3}+\frac{3n}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}+\frac{n^2}{n^3}+1} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}+1}$$

En prenant la limite lorsque $n \to \infty$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{0+0+0}{0+0+1} = 0}$$

b) $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n+1}$

La fonction $\sin(n)$ est bornée entre -1 et 1, donc :

$$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sin(n)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Par le théorème des gendarmes, en prenant la limite lorsque $n \to \infty$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

c) $u_n = \dfrac{1}{n^2-3^n}\cos(n)$

La fonction $\cos(n)$ est bornée entre -1 et 1, donc :

$$\frac{1}{n^2-3^n} \leq \frac{1}{n^2-3^n}\cos(n) \leq -\frac{1}{n^2-3^n}$$

(Il faut ici faire attention au signe du dénominateur qui est négatif)

Par croissances comparées, $n^2 - 3^n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$. Donc, avec le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

d) $u_n = 2n - \sqrt{4n^2+n+1}$

En factorisant par n sous la racine, nous obtenons :

$$u_n = 2n - n\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = n\left(2-\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$$

C'est une forme indéterminée car $n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et la parenthèse tend vers 0. On utilise alors plutôt l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}
2n - \sqrt{4n^2+n+1} &= (2n - \sqrt{4n^2+n+1}) \cdot \frac{2n+\sqrt{4n^2+n+1}}{2n+\sqrt{4n^2+n+1}} \\
&= \frac{(2n)^2 - (4n^2+n+1)}{2n+\sqrt{4n^2+n+1}} \\
&= \frac{-n-1}{n\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} \\
&= \frac{-1-\frac{1}{n}}{2+\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \\
&\boxed{\underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

4. On effectue un pivot de Gauss et on a :

$$\begin{aligned}
S_1 : \begin{cases} x+y+2z = 3 \\ x+2y+z = 1 \\ 2x+y+z = 0 \end{cases} &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3}}{\iff} \begin{cases} x+y+2z = 3 \\ y-z = -2 \\ y+3z = 6 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x+y+2z = 3 \\ y-z = -2 \\ 4z = 8 \end{cases} \qquad \text{(Système de rang 3)} \\
S_1 &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3}}{\iff} \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

De même pour S_2 :

$$\begin{aligned}
S_2 : \begin{cases} 2x+y-z = 0 \\ x-y+z = 1 \\ x+2y-2z = -1 \end{cases} &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_2 - L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x+y-z = 0 \\ 3y-3z = -2 \\ 3y-3z = -2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x+y-z = 0 \\ 3y-3z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \text{(Système de rang 2)} \\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{-2}{3} + z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}
\end{aligned}$$

5. L'opération qu'on a envie de faire ($L_2 \leftarrow mL_1 - L_2$) est possible quelle que soit la valeur de m puisque cela concerne L_1. On obtient alors :

$$S_3 : \begin{cases} x+my &= -3 \\ (m^2-4)y &= -3m-6 \end{cases}$$

Il y a maintenant 3 cas :

— Si $m^2-4 \neq 0$, c'est à dire si $m \notin \{2;-2\}$, le système est de rang 2 et on obtient $y = \dfrac{-3m-6}{m^2-4} = \dfrac{-3(m+2)}{(m-2)(m+2)} = \dfrac{-3}{m-2}$ puis $x = -3 + \dfrac{3m}{m-2} = \dfrac{6}{m-2}$

— si $m = 2$, le système devient :

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{rl} x + 2y & = -3 \\ 0 & = -12 \end{array} \right.$$

Il est de rang 1 et incompatible.

— si $m = -2$, on obtient :

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{rl} x - 2y & = -3 \\ 0 & = 0 \end{array} \right.$$

De rang 1, compatible et on a

$$S_3 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x = -3 + 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

6. Pour A, il suffit d'utiliser le déterminant. Ici $\Delta = 4 - 6 = -2$ et on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Pour B, c'est un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ 2(L_2 - L_1) - L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \text{ et donc } \boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Pour C, encore du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_3 \\ -(L_2 + 2L_1 - 3L_3) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 + L_3 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \text{ et donc } \boxed{C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

7. Pour cette question il n'est pas question de refaire le calcul qu'on vient d'effectuer ! On écrit que le système est équivalent à

$$C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5m - 1 \\ -2m + 1 \\ 4m - 1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}$$

1. Prouver (mathématiquement) que ces suites convergent vers une limite commune l.
2. Écrire une fonction `sommeSn(n)` qui calcule S_n.
3. Écrire une fonction `convergence(n)` qui affiche les n premiers termes de S_n.
4. Écrire un programme qui donne une approximation à 10^{-6} près de l.
5. Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$$

a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n > u_n$.

b) Montrer que l'une des suites est croissante et l'autre décroissante.

c) Justifier que ces deux suites tendent vers des limites l et l'.

d) Justifier que $l = l'$.
(Indication : on pourra raisonner par l'absurde.)

1. On montre que ces suites sont adjacentes :
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$ On a aussi $T_{n+1} - T_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\dfrac{1}{n(n+1)^2} < 0$ donc $\boxed{(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$
   Finalement $T_n - S_n = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc

   $\boxed{\text{les deux suites sont adjacentes et convergent vers une même limite } l.}$

2. On l'a déjà écrite en TP.

```
def sommeSn(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s=s+1/(k**2)
    return s
```

3. Pareil, déjà fait en TP.

```
def convergence(n):
    x=arange(1,n+1)
    y=[]
    for k in range(1,n+1):
        y.append(sommeSn(k))
    plot(x,y,'x')
    show()
```

   Cette fonction marche (sinon je ne la proposerais pas !) mais si on est gentil avec l'ordinateur et qu'on cherche à lui faire faire moins de calculs, on peut écrire :

```
def convergence(n):
    x=arange(1,n+1)
    s=0
    y=[]
    for k in range(1,n+1):
        s=s+1/(k**2)
        y.append(s)
    plot(x,y,'x')
    show()
```

   ce qui évitera à l'ordinateur de calculer des tonnes de fois les premiers termes de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour rien.

4. On a, pour tout entier n, $S_n < l < T_n$, il suffit donc de trouver n tel que $T_n - S_n < 10^{-6}$. On a donc simplement à prendre $n = 10^6 + 1$, pas de boucle while nécessaire ici !

```
print(sommeSn(10**6+1)
```

5. a) Par récurrence. Il est tard alors je vais rédiger vite.
   $\leq u_0 < v_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $0 \leq u_n < v_n$. On a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} - u_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_{n+1}}).$$

Il suffit alors de voir que $0 < u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} < \dfrac{v_n + v_n}{2} = v_n$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ croissante pour conclure $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_{n+1}} > 0$ et donc

$$\boxed{v_{n+1} - u_{n+1} > 0 \quad \text{d'où} \quad 0 < u_{n+1} < v_{n+1}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = \sqrt{v_n}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{v_n} < 0$ donc

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

c) Suite croissante et majorée / décroissante et minorée donc convergentes vers des limites l et l'.

d) On a bien $l = l'$: en effet, puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$ on a aussi $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} l$ mais alors $\dfrac{u_n + v_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} l$ et par somme de limites et unicité on récupère $l = \dfrac{l + l'}{2}$ d'où

$$\boxed{l = l'}$$

On pourrait prouver que cette limite est $\dfrac{2}{\pi}$ mais ce n'est pas demandé ici par l'énoncé, et c'est assez compliqué.

Exercice 5 (Reprise DM)
L'objectif est d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Plus précisément, on étudiera les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des fonctions $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = f(f(x))$.

1. On pose
$$f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}.$$
Donner l'ensemble de définition de f, puis, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et f. Justifier que u_n est bien défini pour tout entier n.
2. On pose
$$g : x \to f(f(x)).$$
Exprimer la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de g.
3. Calculer les premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, conjecturer le comportement de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Résoudre l'inéquation $g(x) - x \geq 0$.
5. Dresser le tableau de variations de g, et justifiez que, si
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
alors
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq g(x) \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
et que, si
$$x > \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
alors
$$g(x) > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

6. Étudier le sens de variation des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
7. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Si oui, vers quelle limite ? On n'attend pas de justification pour la deuxième partie de la question.
   On pourra justifier plus tard la limite de ces suites quand on aura vu le chapitre sur la continuité.

1. L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En effet, la fonction f n'est pas définie pour $x = 0$.
   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{u_n}$$
   Comme $u_0 = 1 \neq 0$, on a $u_1 = f(u_0) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ bien définie. Par récurrence, on montre que u_n est bien défini pour tout entier n et $u_n > 0$:
   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n > 0$. On a alors $f(u_n)$ bien définie et $f(u_n) > 0$. Donc u_{n+1} existe et est supérieur à 0.
   Conclusion : Par application du principe de récurrence, on a montré :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n > 0.}$$

2. La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \geq 1$:
   $$u_{2n} = f(u_{2n-1}) = f(f(u_{2n-2})) = \boxed{g(u_{2(n-1)})}$$
   La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \geq 1$:
   $$u_{2n+1} = f(u_{2n}) = g(u_{2n-1}) = \boxed{g(u_{2(n-1)+1})}$$

3. Les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont :
   $$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{5}{3}, u_4 = \frac{8}{5}, u_5 = \frac{13}{8}, \dots$$
   On constate que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ semble $\boxed{\text{croissante}}$ et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ semble $\boxed{\text{décroissante}}$. De plus, elles semblent adjacentes.
4. Résolution de l'inéquation $g(x) - x \geq 0$:
   $$g(x) - x = f(f(x)) - x = \left(1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right) - x = \frac{2x+1}{x+1} - x = \frac{-x^2 + x + 1}{x+1}$$
   Il faut alors étudier le signe de cette expression :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{-x^2+x+1}{x+1}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)-x$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Cette expression est positive si et seulement si $\boxed{x \in]-\infty;-1[\cup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right[\cup \left]0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].}$

5. Pour le tableau de variations de g, on commence par calculer la dérivée pour $x \neq -1$ et $x \neq 0$ (elle existe par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas) :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2x+1}{x+1} \\ g'(x) &= \frac{(x+1)(2)-(2x+1)(1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$. Pour simplifier, on peut définir $g(1) = \frac{3}{2}$ afin que notre fonction soit continue sur $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

En ajoutant les informations trouvées question précédente, on a alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \Longrightarrow\ & g(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \leq g(x) \leq g(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \text{ car la fonction } g \text{ est croissante sur cet intervalle} \\ \Longrightarrow\ & \boxed{\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq g(x) \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

On peut encore utiliser la croissance de g pour avoir

$$\begin{aligned} & x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \Longrightarrow\ & g(x) \geq g(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \text{ car la fonction } g \text{ est croissante sur cet intervalle} \\ \Longrightarrow\ & \boxed{g(x) \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

6. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$:

Initialisation : $u_0 = 1$ donc vrai au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_{2n} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Montrons que $u_{2n+2} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

On a $u_{n+2} = g(u_{2n}) \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ car $u_{2n} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et alors d'après la question précédente c'est aussi le cas pour $g(u_{2n})$.

Conclusion : Par application du principe de récurrence on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]}$$

.

Mais alors, on a, d'après la question 4 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} - u_{2n} = g(u_{2n}) - u_{2n} \geq 0$$

Et $\boxed{\text{la suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc croissante !}}$

Je vous laisse écrire la même chose pour la suite des termes impairs, mais cette fois-ci elle sera à valeurs dans $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$ et donc $\boxed{\text{décroissante.}}$

7. $\boxed{\text{Les suites } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes vers } \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Pour montrer qu'elles sont convergentes, il suffit de voir qu'elles sont croissante (resp décroissante) et majorée (resp minorée) par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exercice 6 Dans le jeu de dés des "petits chevaux", on demande aux joueurs d'obtenir un 6 (sur un dé à 6 faces) pour sortir leur pion de l'écurie. On se propose d'étudier cette sortie de l'écurie d'un point de vue probabilité, puis d'en faire une simulation informatique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note S_k l'événement "le cheval sort de l'écurie au k-ème essai".

On note également D_k l'événement "le dé donne un 6 au $k$ieme essai".

On suppose que que le dé est équilibré, que tous les lancers sont indépendants, et que si on arrive au n-ème essai, le joueur, lassé par le jeu, triche et obtient forcément un 6.

1. On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est à dire que si le joueur arrive au 3ième essai, il triche et fait forcément un 6.
   a) Pourquoi ne peut-on pas dire $P(S_3) = 1$?
   b) Calculez $P(S_1)$.
   c) Exprimez S_2 en fonction de D_1 et D_2, et S_3 en fonction de D_1, D_2 et D_3, puis calculez $P(S_2)$ et $P(S_3)$
2. On suppose dans cette question que $n > 1$.
   Déterminez $P(S_k)$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, puis $P(S_n)$.
3. On suppose que le joueur ne triche plus. Calculez la probabilité que le cheval ne sorte jamais.
4. Dans toute cette question, on suppose qu'il n'y a pas de triche (le nombre d'essais peut donc être aussi grand que nécessaire).
   a) Corriger le programme ci-dessous afin qu'il simule la répétition de lancer d'un dé 6 faces juqu'à l'obtention d'un 6 et retourne le nombre d'essais.

```
from random import randint
def avoirunsix():
   n=1
   R=randint(1,6)
   while R!=6:
      n=n+1
   return R
```

   b) On suppose que le programme de la question précédente est corrigé et chargé dans la console.
   Complèter le programme ci dessous afin qu'il calcule n fois le nombre d'essais pour avoir un 6 et qu'il retourne la moyenne de ce nombre d'essais.

```
def moyenne(n):
    ....
    .... :
         ......
    return....
```

1. a) Dire que $P(S_3) = 1$ signifierait que le cheval sort toujours de l'écurie au 3ème essai, ce qui est faux. Il peut en effet sortir dès le premier essai, ou au second. Ce qui vaut 1, c'est la probabilité de S_3 "sachant qu'il n'est pas sorti au premier ni au deuxième essai".

   b) $P(S_1) = P(D_1) = \dfrac{1}{6}$ car le dé est équilibré.

   c) On a $S_2 = \bar{D_1} \cap D_2$ et $S_3 = \bar{D_1} \cap \bar{D_2} \cap D_3$. Ainsi, par la formule des probabilités composées, on a

   $P(S_2) = P(\bar{D_1})P_{\bar{D_1}}(D_2) = \dfrac{5}{6}\dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{36}$ par indépendance des événements D_1 et D_2.

   Pour S_3, la fin n'est pas indépendante : sachant $\bar{D_1}$ et $\bar{D_2}$, la probabilité de D_3 est de 1 puisque le joueur triche.

   On obtient :

$$P(S_3) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times 1 = \frac{25}{36}$$

2. Remarquons comme dans la question 1a) que $S_1 = D_1$ et donc $P(S_1) = \dfrac{1}{6}$.

   Pour $1 < k < n$, sortir au $k$ème essai signifie que les lancés jusqu'à $k-1$ qui n'ont pas donné 6, et le $k$ème a donné un 6, d'où :

$$S_k = \bar{D_1} \cap \bar{D_2} \cap \ldots \cap \bar{D_{k-1}} \cap D_k$$

   Par indépendance,

$$P(S_k) = P(\bar{D_1}) \times P(\bar{D_2}) \times \ldots \times P(\bar{D_{k-1}}) \times P(D_k)$$

   Donc $P(S_k) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1} \dfrac{1}{6}$. (formule valable aussi pour $k = 1$).

   Enfin, pour $k = n$, S_n est l'événement "jusqu'à $n-1$ inclu,on n'a pas obtenu de 6, puis on triche pour en avoir un (autrement dit, D_n est alors certain), ce qui donne : $P(S_n) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$

3. Si on n'a pas de triche possible, k peut aller jusqu'à l'infini. Ainsi, la probabilité pour que le cheval ne sorte jamais est la limite de $P(S_k)$ quand $k \to +\infty$. Or $|\dfrac{5}{6}| < 1$, donc $\lim P(S_k) = 0$: le cheval finira toujours par sortir.

4. a) Il y avait deux erreur dans ce programme. Une boucle infinie parce que R n'est pas recalculé dans le `while`, et le retour proposé était R au lieu de n. Voici une version corrigée :

```
from random import randint
def avoirunsix():
    n=1
    R=randint(1,6)
    while R!=6:
        n=n+1
        R=randint(1,6)
    return n
```

b) L'idée est d'exécuter n fois le programme précédent en ajoutant le résultat dans une variable S, puis de diviser tout ça par n.

```
def moyenne(n):
    S=0
    for k in range(n):
        S=avoirunsix()+S
    return S/n
```

Exercice 7 (Edhec ECS 2021)

1. Question préliminaire :
   On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

   a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.

   c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité suivante :

$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$

   d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

   On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$.

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien définie et supérieur ou égal a 1 .

   b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et donner sa limite.

   c) Écrire un scipt Python qui permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.

3. Recherche d'un équivalent de u_n.

   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \dfrac{1}{2}$.

   b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   c) Utiliser la première question pour établir que : $\dfrac{u_n}{\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

4. a) Exprimer S_n en fonction de u_n.
   Indication pas dans le sujet initial : on pourra calculer les premiers termes et démontrer une conjecture par récurrence.

   b) Des propositions suivantes, laquelle (lesquelles) est (sont) vraies ? Justifier votre réponse.

i. $\dfrac{4S_n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ ii. $\dfrac{nS_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ iii. $\dfrac{\frac{n}{2}}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ iv. $\dfrac{2S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$

c) Compléter le script `Python` suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question 2.c) sans calculer S_n :

```
n=0
u=1   # u0=1

while u<=.........
    u=.............
    n=n+1
print(..........)
```

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$ on a par croissance de la suite :

$$a_k \leqslant a_n$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} a_n \qquad \text{autrement dit} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant n a_n$$

En divisant par n qui est strictement positif on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant a_n$$

On a bien établi :

$$\boxed{b_n \leqslant a_n}$$

On étudie maintenant la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On s'intéresse au signe de $b_{n+1} - b_n$. On remarque que :

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{n+1}\times\left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) = \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+1}\times\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{=b_n} = \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+}$$

On a donc :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+1}b_n - b_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geqslant 0} \times \underbrace{(a_n - b_n)}_{\geqslant 0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{b_{n+1} - b_n \geqslant 0}$$

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

b) Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge vers le réel ℓ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n \leqslant \ell$. Or, on vient de montrer que $b_n \leqslant a_n$. On a donc :

$$b_n \leqslant \ell$$

Ceci prouve que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{majorée}}$ De plus, elle est $\boxed{\text{croissante}}$ (question 1.a). On en déduit qu'elle converge vers un réel que l'on note ℓ'. Enfin, en passant à la limite dans l'inégalité

$$b_n \leqslant \ell$$

on obtient bien :

$$\boxed{\ell' \leqslant \ell}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$b_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} a_k = \frac{1}{2n} \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1} a_k$$

Or, d'une part :

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{b_n} = \frac{b_n}{2}$$

D'autre part, pour tout $k \in [\![n; 2n-1]\!]$ on a (par croissance de la suite) :

$$a_k \geqslant a_n$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant \underbrace{\sum_{k=n}^{2n-1} a_n}_{na_n} \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant \frac{a_n}{2}$$

On a bien établi l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{b_{2n} \geqslant \frac{b_n}{2} + \frac{a_n}{2}}$$

d) En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\ell' \geqslant \frac{\ell'}{2} + \frac{\ell}{2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\ell' \geqslant \ell}$$

De plus on a établi en question 1.b l'inégalité $\ell' \leqslant \ell$. On en déduit que : $\ell' = \ell$. Autrement dit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n}$$

2. a) On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation. Pour $n = 0$, le terme u_0 est bien défini et vaut 1. On a donc bien : $u_0 \geqslant 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n est bien défini et que : $u_n \geqslant 1$. Montrons que :

$$u_{n+1} \text{ est bien défini et que : } u_{n+1} \geqslant 1$$

On a : $u_n^2 \geqslant 0$ et $u_n \geqslant 1$ donc : $u_n^2 + u_n \geqslant 1$. Le terme $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ est donc $\boxed{\text{bien défini}}$ (la quantité sous la racine est positive) et par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$:

$$u_{n+1} \geqslant \sqrt{1} \quad \text{autrement dit} \quad \boxed{u_{n+1} \geqslant 1}$$

Ceci achève la récurrence.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geqslant 0$ donc :

$$u_n^2 + u_n \geqslant u_n^2$$

Par croissance de la fonction racine on en déduit :

$$\underbrace{\sqrt{u_n^2 + u_n}}_{u_{n+1}} \geqslant \sqrt{u_n^2}$$

Enfin, $u_n \geqslant 0$ donc $\sqrt{u_n^2} = u_n$. On a donc établi l'inégalité :

$$\boxed{u_{n+1} \geqslant u_n}$$

Ceci prouve que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$ On a donc deux possibilités :

1) soit cette suite converge
2) soit elle diverge vers $+\infty$.

On va écarter le cas 1) en raisonnant par l'absurde. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers un réel que l'on note c. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \qquad \text{donc} \qquad u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$$

En passant à la limite dans cette égalité on obtient :

$$c^2 = c^2 + c \qquad \text{donc} \qquad c = 0$$

D'autre part, $u_0 = 1$ et la suite est croissante. On a donc nécessairement : $c \geqslant 1$.

On obtient la contradiction suivante : $0 \geqslant 1$.

Ceci prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, et donc qu'elle $\boxed{\text{diverge vers } +\infty}$

c)

```
n=1
u=1
S=1
while S<=1000
    u=sqrt(u^2+u)
    S=S+u
    n=n+1
end
disp(n)
```

Remarque Comme $S_n \geqslant u_{n-1}$, S_n tend vers $+\infty$. Ceci garantit que la boucle while s'arrêtera.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1}-u_n = \sqrt{u_n^2+u_n}-u_n = \frac{\left(\sqrt{u_n^2+u_n}-u_n\right)\times\left(\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n\right)}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n} = \frac{\sqrt{u_n^2+u_n}^2-u_n^2}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n} =$$

En divisant numérateur et dénominateur par u_n (licite car $u_n > 0$) on obtient :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+1}$$

Enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$ donc par continuité de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$ en $x = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+1} \qquad \text{existe et vaut} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

On a bien montré que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}}$$

Remarque On pouvait aussi partir de l'écriture $u_{n+1} - u_n = u_n \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{u_n}} - 1\right)$ et appliquer l'équivalent usuel $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$ à $x = \frac{1}{u_n}$.

b) La fonction f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right)\times\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)}{2\sqrt{x^2+x}\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)}$$

Le dénominateur est positif et le numérateur vaut :

$$\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right)\times\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right) = (2x+1)^2 - \left(2\sqrt{x^2+x}\right)^2 = 4x^2+4x+1-4(x^2$$

On a donc, pour tout $x \in [1;+\infty[$: $\boxed{f'(x) > 0}$ Ceci prouve que

la fonction f est $\boxed{\text{strictement croissante}}$ sur $[1;+\infty[$

On va maintenant montrer que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant u_{n+2} - u_{n+1}$$

On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = f(u_n)$$

et de même :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1})$$

Or, on sait que : $u_n \leqslant u_{n+1}$ (question 2.b). Par croissance de la fonction f on en déduit :

$$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \qquad \text{donc} \qquad u_{n+1} - u_n \leqslant u_{n+2} - u_{n+1}$$

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

c) On applique le raisonnement de la question 1 avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci est licite car la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante (3.b) et convergente (3.a). On sait d'après 1.d que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n} \times (u_n - u_0) = \frac{u_n}{n} - \frac{1}{n}$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} - \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) \overset{3.a}{=} \frac{1}{2}$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} - \underbrace{\frac{2}{n}}_{\text{tend vers } 0} = 1 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} = 1$$

Ceci prouve bien que : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}}$

4. a) On commence par calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

n	0	1	2	3
u_n	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
S_n		1	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Sur les premiers termes la formule $\boxed{S_n = u_n^2 - 1}$ est vérifiée. Essayons d'établir cette formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Pour $n = 1$ on a bien :

$$\underbrace{S_1}_{1} = \underbrace{u_1^2 - 1}_{2-1}$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que : $S_n = u_n^2 - 1$. Montrons que : $S_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1$. On a :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = S_n + u_n$$

Par hypothèse de récurrence : $S_n = u_n^2 - 1$. Donc :

$$S_{n+1} = u_n^2 - 1 + u_n$$

D'autre part :

$$u_{n+1}^2 - 1 = \sqrt{u_n^2 + u_n}^2 - 1 = u_n^2 + u_n - 1$$

On a donc bien : $\boxed{S_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1}$

Ceci achève la récurrence. On cherche maintenant un équivalent de S_n en $+\infty$. On a :

$$\frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} = \frac{u_n^2}{\frac{n^2}{4}} - \frac{1}{\frac{n^2}{4}} = \underbrace{\left(\frac{u_n}{\frac{n}{2}}\right)^2}_{\text{tend vers } 1} - \underbrace{\frac{4}{n^2}}_{\text{tend vers } 0} \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} = 1$$

Bilan : $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4}}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a donc les équivalences suivantes :

$$S_n \leqslant 1000 \iff u_n^2 - 1 \leqslant 1000 \iff u_n^2 \leqslant 1001 \iff u_n \leqslant \sqrt{1001}$$

(on a utilisé la stricte croissance de la fonction racine carrée). D'où le programme suivant :

```
n=0
u=1
while u<=sqrt(1001)
    u=sqrt(u^2+u)
    n=n+1
end
disp(n)
```

Exercice 8 (D'après sujet de concours)
Le sujet est constitué de deux parties liées. La seconde partie peut être traitée en admettant les résultats de la première.

Première partie Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculez $Q(x)$, le polynôme donné par le déterminant de la matrice $(A - xI_2)$.
   b) Déterminez les deux racines de Q.
2. a) Montrez que P est inversible et calculez P^{-1}.
   b) Vérifiez que la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines obtenues à la question 1.
3. a) Exprimez A en fonction de D, P et P^{-1}.
   b) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$A^n = PD^nP^{-1}$$
   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Deuxième partie Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièce contiguës, notées, A, B et C.

A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B. On suppose que les déplacements de la mouche suivent le protocole suivant :

— Si à un instant n donné, la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C, alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n + 1$.
— Si à un instant n donné la mouche est dans la pièce B, elle y reste à l'instant $n + 1$ avec une probabilité $\frac{1}{2}$, ou elle va dans la pièce A ou la pièce B de façon equiprobable.

Pour tout entier n, on définit l'événement A_n : "la mouche est dans la pièce A à l'instant n". On définit de la même façon les événements B_n et C_n.
Enfin, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces événements.

1. Montrez que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{b_n}{4}, b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + c_n, \text{ et } c_{n+1} = \frac{b_n}{4}$$
2. Montrez que la suite (b_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont on précisera b_0, b_1 et la relation liant b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.
   On ne cherchera pas à déterminer cette suite avec le polynôme caractéristique
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$
   a) Vérifiez que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et montrez que $U_{n+1} = AU_n$ où A est la matrice de la première partie.
   b) Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^nU_0$
   c) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.
   d) Déterminez les expressions de a_n et c_n.
   e) Calculez les limites de chacune de ces suites

Première partie

1. a) On a $A - xI_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \\ 0 & -x \end{pmatrix}$

   Le déterminant est $Q(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)(-x) - \frac{1}{2} = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

   b) On voit que 1 est racine évidente. L'autre racine est donc $-\frac{1}{2}$ puisque le produit doit donner $-\frac{1}{2}$

2. a) Le determinant de P est -3 d'où

$$P^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   b) C'est un calcul tout simple et on trouve

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. a) Comme $D = P^{-1}AP$, il suffit de multiplier à droite par P^{-1} et à gauche par P pour obtenir $A = PD^{-1}$

   b) C'est une récurrence (cf les corrigés précédents pour le détail)

   c) Comme D est diagonal, on a $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$.

   On effectue ensuite le produit proposé. Les puissances $n-1$ proviennent de la multiplication par -2.

Deuxième partie

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événement.
   Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

   D'après le protocole précisé dans l'énoncé, $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$ (la mouche revient dans B si elle est dans A) et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$ (la mouche ne passe pas de la pièce C à la pièce A directement).
   Enfin, $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ puisqu'elle doit aller en A ou en C "de façon équiprobable", et qu'il y a déjà une probabilité de $1/2$ qu'elle reste en B.
   Ainsi il ne reste que $P(A_{n+1}) = P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1})$, c'est à dire

$$a_{n+1} = \frac{b_n}{4}$$

   On justifie de la même façon les autres relations.

2. Comme $b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + c_n$, on a $b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{b_{n+1}}{2} + c_{n+1}$. En remplaçant avec les formules donnant a_{n+1} et c_{n+1}, il vient :
   $b_{n+2} = \frac{b_n}{4} + \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{b_n}{4}$

et finalement

$$b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{b_n}{2}$$

3. a) L'énoncé dit que la mouche est, à l'instant 0, dans la salle B. Donc $b_0 = 1$, $a_0 = 0$ et $c_0 = 0$. Comme $b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + c_n$, on en déduit $b_1 = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ et on a bien $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

On calcule AU_n et on obtient $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$.

Or

$$b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{b_n}{2}$$

, donc $AU_n = \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ b_n \end{pmatrix} = U_{n+1}$

On a bien la relation demandée.

b) Par récurrence, montrons que $U_n = A^n U_0$:
On a bien $U_0 = A^0 U_0$ vu que $A^0 = I_2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = A^n U_0$.
Alors $U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$
La formule est bien héréditaire.
Conclusion : la formule est initialisée et est héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $U_n = A^n U_0$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = A^n U_0 &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (\frac{1}{2} - 1) \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (\frac{1}{2} - 1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où $b_n = \frac{1}{3}(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n)$

c) On sait déjà que $a_0 = 0$. De plus, on a $a_{n+1} = \frac{b_n}{4}$ donc pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{b_{n-1}}{4} = \frac{1}{12}(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1})$$

Remarquons que la formule obtenue fonctionne aussi pour $n = 0$, la puissance $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ devant -2 pour $n = 0$.

De même on trouve $c_n = \frac{1}{12}(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1})$

d) Comme $|-\frac{1}{2}| < 1$, on a $\lim \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \lim \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} = 0$ d'où $\lim a_n = \frac{1}{6}$, $\lim b_n = \frac{2}{3}$ et $\lim c_n = \frac{1}{6}$.