Devoir n°3

La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
4. Le sujet comporte 6 pages et 9 exercices. Bon courage !

Exercice 1 (Quelques calculs pour s'échauffer) -

Simplifier au maximum

$$\frac{10^{2n+3}(6n-2)}{12^{n+2}} - \frac{35^{2n+1}(175n-7)}{147^{n+1}}$$

Indication : on pourra effectuer la division de 147 par 3.

Résoudre l'inéquation

$$\frac{49x^2-42x+9}{4x^2-25} \geq \frac{14x^2+29x-15}{4x^2+20x+25}.$$

Indication : on pourra effectuer la division euclidienne de $14x^2+29x-15$ *par* $2x+5$

Exercice 2 (Questions de cours)

— Quelle propriété vérifient les racines d'un polynôme ? Démontrer ce résultat.

— Écrire un programme calculant $\sum_{k=p}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$, puis donner la formule permettant de trouver directement cette quantité.

— Théorème limite et suite (vous pouvez le prouver avec a et b de votre choix)

Exercice 3 (Des exercices proches du cours ou du DS précédent)

1. En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

   a) $|2x-3| = x+4$

   b) $\sqrt{-2x-5} = x+4.$

   c) $\ln(x^2+1) + 2\ln(2) - \ln(2x+7) = 0.$

   d) $2e^{3x} - 2e^{2x} = 24e^x.$

   e) $\ln(x^2-3x-4) \geq 0$

   f) $x+1-\sqrt{x+5} \geq 0$

2. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système ci dessous :

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{rl} x+my & = -3 \\ mx+4y & = 6 \end{array} \right.$$

3. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   Calculez A^n et en déduire B^n.

4. Trouver les polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   a) $2P(x^2+1) = (x^3+2x^2+2x+4)P'(x)$ b) $P'(x^3-1) = (3x^3+5x+2)P(x)$

5. Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}_4[x]$ tels que :

$$P(0) = 0;\ P(1) = 0;\ P(-1) = 1;\ P'(1) = 0;\ P'(-1) = 2.$$

   On pourra donner la réponse sous forme factorisée.

6. Donner la factorisation des polynômes suivants :

   a) $P = x^4+x^3+3x^2-5x$, b) $Q = x^5+3x^3-10x$, c) $R = x^4+6x^2+25$.

7. Trouver les réels a et b tel que $(X-1)^2$ divise aX^4+bX^3+1, et factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme obtenu.
8. Calculez les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x^2-x^6}{7x+8x^6}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{x^3-x^2-x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(\cos(x))}{x}$

   b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+e^x+2}{e^{2x}+\ln(x)+x^5}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+x)}{\sin x^2}$

9. Qu'est-ce qu'une base d'un espace vectoriel ? Proposer une base de $\mathbb{R}^3$ contenant $(1,1,1)$ et démontrer que c'en est une.
10. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-y+2z = 0\}$.
    Montrez que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser une base et la dimension de E.
11. Soient $u = (1,2,1)$, $v = (2,0,3)$ et $w = (0,1,1)$.
    a) Montrez que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
    b) Donnez les coordonnées du vecteur $t = (-1,10,1)$ dans cette base.

Exercice 4 (ECRICOME ECT 2023) *Assez facile, vous pouvez viser les autres exercices si vous vous sentez à l'aise*

Partie 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\begin{cases} u_1 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{5}{12}u_n + \dfrac{1}{3} \end{cases}$

1. Compléter la fonction en langage Python suivante, qui prend en entrée un entier naturel non nul **n** et un réel **u1** de $[0,1]$ correspondant au terme initial u_1 de la suite, et renvoie le terme u_n.

```
import numpy as np

def suite(n,u1) :
    u=u1
    for k in range(..) :
      u=.....
    return u
```

2. Donner l'expression du terme général de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en fonction de n et de u_1.

Partie 2

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. On note $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer AX_1 et AX_2.
4. Montrer que P est inversible et donner son inverse. (*On vérifiera que* $P^{-1} = Q$.)
5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   a) Calculer $P^{-1}X$
   b) En déduire l'expression de A^nX pour tout entier naturel n.

Partie 3

Un client d'une agence de voyages cherche à prévoir ses vacances au soleil pour l'hiver (entre décembre et février) et à éviter la pluie. Sur la destination souhaitée, on suppose que soit il pleut, soit il fait beau.
On sait de plus que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

— S'il fait beau un certain jour n, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{3}{4}$.

— S'il pleut un certain jour n, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{1}{3}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :
— A_n l'événement : «Il fait beau le jour n », et a_n la probabilité $P(A_n)$.
— B_n l'événement : «Il pleut le jour n », et b_n la probabilité $P(B_n)$.

On suppose que le jour 1 , à savoir le 1er décembre, il fait beau. Donc $a_1 = P(A_1) = 1$.

7. Déterminer b_1, a_2, b_2.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que $P(A_{n+1}) = \frac{3}{4}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$ et que $P(B_{n+1}) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n)$.
   b) En déduire que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où $M = \frac{1}{12}A$.
   c) Justifier que $a_n + b_n = 1$.
9. a) Exprimer, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ en fonction de M et n.
   b) En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.
10. On se propose, dans cette question, de trouver le terme général de $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ d'une manière différente.
    a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}$
    b) En utilisant la partie 1, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$
    c) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.
11. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
12. Le client doit partir le 1er décembre, pour un séjour de 10 jours (du 1er décembre au 10 décembre).
    a) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau durant les 9 premiers jours et qu'il pleuve le dernier jour ?
    b) Quelle est la probabilité que le voyageur reparte sous la pluie, c'est-à-dire qu'il pleuve le jour 10 ?

Exercice 5 (Edhec ECS 2021)

1. Question préliminaire :
   On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:
   $$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$
   a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.
   c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité suivante :
   $$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$
   d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

   On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$
   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$.

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien définie et supérieur ou égal a 1 .
   b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et donner sa limite.
   c) Écrire un scipt Python qui permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.
3. Recherche d'un équivalent de u_n.
   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c) Utiliser la première question pour établir que : $\dfrac{u_n}{\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.
4. a) Exprimer S_n en fonction de u_n.
   Indication pas dans le sujet initial : on pourra calculer les premiers termes et démontrer une conjecture par récurrence.
   b) Des propositions suivantes, laquelle (lesquelles) est (sont) vraies ? Justifier votre réponse.
   i. $\dfrac{4S_n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ ii. $\dfrac{nS_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ iii. $\dfrac{\frac{n}{2}}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ iv. $\dfrac{2S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$
   c) Compléter le script `Python` suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question 2.c) sans calculer S_n :

```
n=0
u=1   # u0=1

while u<=.........
    u=..............
    n=n+1
print(...........)
```

Exercice 6 (Un grand classique vu en DM)

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f converge en $+\infty$, g périodique et $f+g$ croissante. Montrer que g est constante.

Exercice 7 (Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{(x+1)\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer le signe de f sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue en 1. f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?
3. Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
4. Soit g la fonction $g(x) = x - \dfrac{1}{x} - 2\ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$.
   a) Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
   b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction g sur $]0, +\infty[$.
   c) Préciser le signe de g sur $]0, +\infty[$.
5. En déduire le tableau de variations complet de f.
6. Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
7. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $\ln(x) < x - 1$. En déduire que, pour tout $x > 1$, on a $f(x) < x$.
8. Donner la représentation graphique de la fonction f avec sur le même graphique la droite d'équation $y = x$.
9. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = a > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
   b) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 8 (Suite implicite)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1], f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1]$, donner une expression simplifiée de $f_n(x)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x, possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.
3. a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
4. a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leqslant \alpha_2 < 1$.
   b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
   c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 9 (Et une autre ! - la fin est un peu plus difficile)

1. On définit pour tout entier $n \geq 3$ la fonction $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - n\ln x \end{array} \right.$
   a) Étudier les variations et les limites de f_n et dresser son tableau de variations.
   b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}^{*+}$. On note a_n la plus petite des solutions et u_n l'autre.
   c) Justifier que : $1 \leq a_n \leq n \leq u_n$.
2. Étude de la suite $\left(a_n\right)_{n\geq 3}$
   a) Montrer que $\left(a_n\right)_{n\geq 3}$ est décroissante : on comparera $f_{n+1}(a_n)$ avec $f_{n+1}(a_{n+1})$
   b) En déduire que $\left(a_n\right)_{n\geq 3}$ est convergente et que sa limite est 1.
   c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(a_n)}{a_n - 1} = 1$.
   d) En déduire la limite de $n(a_n - 1)$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Étude de la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 3}$
   a) Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 3}$ quand n tend vers $+\infty$.
   b) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, $\quad n\ln n \leq u_n \leq 2n\ln n$.
   c) En déduire la limite de $\dfrac{u_n}{n\ln n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Bonnes fêtes à toutes et tous !