# Devoir n°3



**La calculatrice est interdite.** Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
4. Le sujet comporte 6 pages et 9 exercices. Bon courage !

**Exercice 1 (Quelques calculs pour s'échauffer)** -

Simplifier au maximum

$$\frac{10^{2n+3}(6n-2)}{12^{n+2}} - \frac{35^{2n+1}(175n-7)}{147^{n+1}}$$

*Indication : on pourra effectuer la division de 147 par 3.*

Résoudre l'inéquation

$$\frac{49x^2-42x+9}{4x^2-25} \geq \frac{14x^2+29x-15}{4x^2+20x+25}.$$

*Indication : on pourra effectuer la division euclidienne de* $14x^2+29x-15$ *par* $2x+5$

Cet exercice est très similaire à celui du DS précédent, je traite donc la correction très rapidement.

**Simplification :**Après simplifications, on a :

$$\boxed{\frac{5^{2n+1}}{3^{n+2}}(-22)}$$

**Inéquation :** On reconnaît des identités remarquables, l'équation devient :

$$\frac{(7x-3)^2}{(2x-5)(2x+5)} - \frac{(7x-3)(2x+5)}{(2x+5)^2} \geq 0$$

On simplifie et on met tout sur le même dénominateur, l'équation devient :

$$\frac{(7x-3)(7x-3-2x+5)}{(2x-5)(2x+5)} \geq 0$$

Il faut alors faire un tableau de signe pour conclure :

$$7x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{7}$$

$$5x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{5}$$

$$2x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$$

$$2x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$$

Le tableau est donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{5}{2}$ | | $-\frac{2}{5}$ | | $\frac{3}{7}$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(7x-3)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(2x-5)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(5x+2)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $(2x+5)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| Total | | $+$ | $\vert$ | $-$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

En conclusion, la solution de l'inéquation est :

$$x \in \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[ \cup \left]-\frac{2}{5}, \frac{3}{7}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$$

**Exercice 2 (Questions de cours)**

- Quelle propriété vérifient les racines d'un polynôme ? Démontrer ce résultat.
- Écrire un programme calculant $\sum_{k=p}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$, puis donner la formule permettant de trouver directement cette quantité.
- Théorème limite et suite (vous pouvez le prouver avec $a$ et $b$ de votre choix)

Voir cours

**Exercice 3 (Des exercices proches du cours ou du DS précédent)**

1. En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x$ réelle :

   a) $|2x-3| = x+4$
   b) $\sqrt{-2x-5} = x+4$.
   c) $\ln(x^2+1) + 2\ln(2) - \ln(2x+7) = 0$.
   d) $2e^{3x} - 2e^{2x} = 24e^x$.
   e) $\ln(x^2-3x-4) \geq 0$
   f) $x+1-\sqrt{x+5} \geq 0$

2. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système ci dessous :

$$S_3 : \begin{cases} x+my &= -3 \\ mx+4y &= 6 \end{cases}$$

3. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   Calculez $A^n$ et en déduire $B^n$.

4. Trouver les polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

   a) $2P(x^2+1) = (x^3+2x^2+2x+4)P'(x)$ b) $P'(x^3-1) = (3x^3+5x+2)P(x)$

5. Trouver les polynômes $P$ de $\mathbb{R}_4[x]$ tels que :

   $$P(0)=0;\ P(1)=0;\ P(-1)=1;\ P'(1)=0;\ P'(-1)=2.$$

   On pourra donner la réponse sous forme factorisée.

6. Donner la factorisation des polynômes suivants :

   a) $P = x^4+x^3+3x^2-5x$, b) $Q = x^5+3x^3-10x$, c) $R = x^4+6x^2+25$.

7. Trouver les réels $a$ et $b$ tel que $(X-1)^2$ divise $aX^4+bX^3+1$, et factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme obtenu.

8. Calculez les limites suivantes :

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x^2-x^6}{7x+8x^6}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{x^3-x^2-x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(\cos(x))}{x}$

   b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+e^x+2}{e^{2x}+\ln(x)+x^5}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+x)}{\sin x^2}$

9. Qu'est-ce qu'une base d'un espace vectoriel ? Proposer une base de $\mathbb{R}^3$ contenant $(1,1,1)$ et démontrer que c'en est une.

10. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-y+2z=0\}$.
    Montrez que $E$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser une base et la dimension de $E$.

11. Soient $u=(1,2,1)$, $v=(2,0,3)$ et $w=(0,1,1)$.
    a) Montrez que $(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
    b) Donnez les coordonnées du vecteur $t=(-1,10,1)$ dans cette base.

1. Cela fait trois fois qu'on fait cette partie, je vous laisse vous reporter au DS précédent et j'espère que cette fois-ci c'est compris.

2. Idem, repris du DS précédent. Je remets le corrigé ici :
   L'opération qu'on a envie de faire ($L_2 \leftarrow mL_1 - L_2$) est possible quelle que soit la valeur de $m$ puisque cela concerne $L_1$. On obtient alors :

   $$S_3 : \begin{cases} x+my &= -3 \\ (m^2-4)y &= -3m-6 \end{cases}$$

   Il y a maintenant 3 cas :

   — Si $m^2-4 \neq 0$, c'est à dire si $m \notin \{2;-2\}$, le système est de rang 2 et on obtient $y = \dfrac{-3m-6}{m^2-4} = \dfrac{-3(m+2)}{(m-2)(m+2)} = \dfrac{-3}{m-2}$ puis $x = -3 + \dfrac{3m}{m-2} = \dfrac{6}{m-2}$

   — si $m=2$, le système devient :

   $$S_3 : \begin{cases} x+2y &= -3 \\ 0 &= -12 \end{cases}$$

   Il est de rang 1 et incompatible.

   — si $m=-2$, on obtient :

   $$S_3 : \begin{cases} x-2y &= -3 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

De rang 1, compatible et on a

$$S_3 \iff \left\{ \begin{array}{r} x = -3 + 2y \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

3. Il s'agit ici d'utiliser le binôme de Newton puisque $B = A + I_2$ et que $AI_2 = A = I_2 A$. On calcule dans un premier temps $A^2 = 0_2$, puis, pour $n \geq 2$,

$$B^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} A^k = I_2 + nA = \begin{pmatrix} 1+2n & 4n \\ -n & 1-2n \end{pmatrix}$$

4. a) On raisonne sur le degré en premier : $\deg(2P(x^2+1) = 0 + 2\deg P = 2\deg P$ et

$$\deg((x^3+2x^2+2x+4)P') = 3 + \deg P - 1 = 2 + \deg P$$

On récupère donc $\deg P = -\infty$ ou $\deg P = 2$
Le premier cas donne $P = 0$ et on vérifie aisément que le polynôme nul est solution de l'équation proposée.
Dans le second cas, on écrit $P = ax^2 + bx + c$ et on obtient alors :

$$\begin{aligned} (x^3+2x^2+2x+4)P' &= (x^3+2x^2+2x+4)(2ax+b) \\ &= 2ax(x^3+2x^2+2x+4) + b(x^3+2x^2+2x+4) \\ &= 2ax^4 + 4ax^3 + 4ax^2 + 8ax + bx^3 + 2bx^2 + 2bx + 4b \\ &= 2ax^4 + (4a+b)x^3 + (4a+2b)x^2 + (8a+2b)x + 4b \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} 2P(x^2+1) &= 2\left[a(x^2+1)^2 + b(x^2+1) + c\right] \\ &= 2\left[a(x^4+2x^2+1) + b(x^2+1) + c\right] \\ &= 2\left[ax^4 + 2ax^2 + a + bx^2 + b + c\right] \\ &= 2ax^4 + 2(2a+b)x^2 + 2(a+b+c) \end{aligned}$$

On obtient donc, par unicité des coefficients,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a = 2a \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = 4a + 2b \\ 8a + 2b = 0 \\ 4b = 2(a+b+c) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4a + b = 0 \\ 8a + 2b = 0 \\ 4b = 2(a+b+c) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = -4a \\ -10a = 2c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = -4a \\ c = -5a \end{array} \right.$$

Nous pouvons maintenant écrire le polynôme $P(x)$ avec ces valeurs :

$$\boxed{P(x) = ax^2 - 4ax - 5a}$$

Et ces solutions fonctionnent pour tout $a$.

b) **Raisonnement sur le degré :**
$\deg(P'(x^3-1)) = 3(\deg(P) - 1)$
$\deg((3x^3+5x+2)P(x)) = 3 + \deg(P)$
En égalisant les degrés, nous obtenons :

$$3\deg(P) - 3 = 3 + \deg(P)$$

Il y a alors deux solutions : $P = 0$ (qui fonctionne) ou $\deg P = 3$.

Écrivons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Nous avons :

$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Calculons $P'(x^3 - 1)$ :

$$P'(x^3 - 1) = 3a(x^3 - 1)^2 + 2b(x^3 - 1) + c$$

Calculons $(3x^3 + 5x + 2)P(x)$ :

$$(3x^3 + 5x + 2)P(x) = (3x^3 + 5x + 2)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

En égalisant les deux expressions, nous obtenons :

$$3a(x^3 - 1)^2 + 2b(x^3 - 1) + c = (3x^3 + 5x + 2)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

On développe des deux côtés :

$$\begin{aligned} 3a(x^3 - 1)^2 + 2b(x^3 - 1) + c &= 3a(x^6 - 2x^3 + 1) + 2b(x^3 - 1) + c \\ &= 3ax^6 - 6ax^3 + 3a + 2bx^3 - 2b + c \\ &= 3ax^6 + (2b - 6a)x^3 + (3a - 2b + c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3x^3 + 5x + 2)(ax^3 + bx^2 + cx + d) &= 3x^3(ax^3 + bx^2 + cx + d) + 5x(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &\quad + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= 3ax^6 + 3bx^5 + 3cx^4 + 3dx^3 \\ &\quad + 5ax^4 + 5bx^3 + 5cx^2 + 5dx \\ &\quad + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d \\ &= 3ax^6 + 3bx^5 + (3c + 5a)x^4 + (3d + 5b + 2a)x^3 \\ &\quad + (5c + 2b)x^2 + (5d + 2c)x + 2d \end{aligned}$$

On obtient alors par unicité des coefficients le système suivant :

$$\begin{cases} 3a = 3a \\ 0 = 3b \\ 0 = 3c + 5a \\ 2b - 6a = 3d + 5b + 2a \\ 0 = 5c + 2b \\ 0 = 5d + 2c \\ 3a - 2b + c = 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = b \\ 0 = 3c + 5a \\ -6a = 3d + 2a \\ 0 = 5c + 2b \\ 0 = 5d + 2c \\ 3a - 2b + c = 2d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 0 = 3c + 5a \\ -6a = 3d + 2a \\ c = 0 \\ 5d = -2c \\ 3a - 2b + c = 2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ d = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Le seul polynôme qui fonctionne est donc le polynôme nul.

5. Puisque 0 et 1 sont racines, on a

$$P = x(x - 1)^2(ax + b)$$

et il nous reste à trouver $a$ et $b$. On a $P' = (x-1)^2(ax+b) + 2(x-1)x(ax+b) + x(x-1)^2 a$ et les valeurs en -1 donnent le système :

$$\begin{cases} 4a - 4b = 1 \\ 8b - 12a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

L'unique solution est donc :

$$\boxed{P = -x(x-1)^2(x + \frac{5}{4})}$$

6. a)

$$\begin{aligned} P &= x(x^3 + x^2 + 3x - 5) \quad \text{on constate que 1 est racine évidente} \\ &= \boxed{x(x-1)(x^2+2x+5)} \quad \text{et } \Delta < 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Q &= x(x^4 + 3x^2 - 10) \quad \text{On pose } X = x^2 \\ &= x(X^2 + 3X - 10) \\ &= x(X+5)(X-2) \\ &= \boxed{x(x^2+5)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} R &= x^4 + 10x^2 - 10x^2 + 25 + 6x^2 \\ &= (x^2+5)^2 - (2x)^2 \\ &= \boxed{(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)} \quad \Delta < 0 \text{ pour les deux} \end{aligned}$$

7. On cherche donc à avoir $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. On résout donc le système :

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$$

On effectue la division euclidienne de ce qu'on a trouvé pour obtenir :

$$\boxed{P = (x-1)^2(3x^2+2x+1)}$$

8. a) On factorise par le terme de plus haut degré en haut et en bas, on trouve $\boxed{-\dfrac{1}{8}}$

b) Puisque la limite en haut et en bas est 0, on effectue la division euclidienne et on trouve

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+1)} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

c) Là encore, 0 en haut et en bas, on utilise donc l'expression conjuguée puis des divisions euclidiennes :

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2+x+3-9}{(x-2)(x^2+x+1)(\sqrt{x^2+x+3}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{(x^2+x+1)(\sqrt{x^2+x+3}+3)} = \boxed{\frac{5}{42}}$$

d) Ce sont des croissances comparées, on factorise par $e^x$ en haut et en bas, on obtient $\boxed{0}$

e) Un théorème des gendarmes, qu'il faut bien rédiger. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ \iff & \exp(-1) \leq \exp(\cos(x)) \leq \exp(1) \quad \text{par croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R} \\ \iff & \frac{\exp(-1)}{x} \leq \frac{\exp(\cos(x))}{x} \leq \frac{\exp(1)}{x} \quad \text{pour } x > 0 \end{aligned}$$

On peut alors conclure via le théorème des gendarmes puisque les deux fonctions à l'extérieur de l'encadrement tendent vers $\boxed{0}$ en $+\infty$.

f) Il faut ici raisonner par équivalents pour faire au plus simple. On a

$$\frac{x(\ln(1+x)}{\sin(x)^2} \sim \frac{x^2}{x^2} \to \boxed{1}$$

9. Une base est une $\boxed{\text{famille libre et génératrice d'un espace vectoriel}}$. On peut par exemple proposer la famille $((1,0,0),(0,1,0),(1,1,1))$ comme base de $\mathbb{R}^3$.
Montrons en premier lieu qu'elle est libre : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(1,1,1) = (0,0,0) \\ \iff & \begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Et la famille est bien libre.
Montrons maintenant qu'elle est génératrice, c'est-à-dire que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(1,1,1))$.
L'une des inclusions est comme d'habitude très facile, puisque $\mathbb{R}^3$ est stable par combinaisons linéaires.
Il reste à montrer que $\mathbb{R}^3 \subset \text{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(1,1,1))$ : soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On reprend les calculs précédents en remplaçant $(0,0,0)$ par $(x,y,z)$ :

$$\begin{aligned} & a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(1,1,1) = (x,y,z) \\ \iff & \begin{cases} a + c = x \\ b + c = y \\ c = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = x - z \\ b = y - z \\ c = z \end{cases} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La famille est bien génératrice.}}$

10. On a $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = y - 2z\} = \{(y - 2z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(1,1,0) + z(-2,0,1), y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,1,0),(-2,0,1))$ et donc $\boxed{E \text{ est un espace vectoriel}}$ dont une base est $1,1,0),(-2,0,1))$ (il est facile de montrer que cette famille est libre, je vous laisse faire) et dont la dimension est $\boxed{2}$.

11. a) Montrons que $(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Pour cela, montrons que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $u$, $v$ et $w$.
Considérons un vecteur $t = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Nous cherchons des scalaires $\alpha, \beta, \gamma$ tels que :

$$t = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

soit :

$$(x,y,z) = \alpha(1,2,1) + \beta(2,0,3) + \gamma(0,1,1)$$

Ce qui donne le système :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ 2\alpha + \gamma = y \\ \alpha + 3\beta + \gamma = z \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ 4\beta - \gamma = 2x - y & 2L_1 - L_2 \\ \beta + \gamma = z - x & L_3 - L_1 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ \beta + \gamma = z - x & L_3 \\ 5\gamma = 4z - 6x + y & 4L_3 - L_2 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \alpha = \dfrac{5x - 2x + 2y - 2z}{5} = \dfrac{3x + 2y - 2z}{5} \\ \beta = \dfrac{5z - 5x + 6x - y - 4z}{5} = \dfrac{x - y + z}{5} \\ \gamma = \dfrac{-6x + y + 4z}{5} \end{cases} \\
\iff &\boxed{\begin{cases} \alpha = \dfrac{3x + 2y - 2z}{5} \\ \beta = \dfrac{x - y + z}{5} \\ \gamma = \dfrac{-6x + y + 4z}{5} \end{cases}}
\end{aligned}$$

On a bien trouvé une unique solution, donc la famille est une base de $\mathbb{R}^3$ (je vous ai fait les deux rédactions possibles comme ça, à l'avenir préférez celle-ci, plus rapide, quand vous le pouvez).

b) Nous cherchons $\alpha, \beta, \gamma$ tels que :

$$(-1, 10, 1) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(2, 0, 3) + \gamma(0, 1, 1)$$

Utilisons les formules trouvées précédemment :

$$\alpha = \frac{3(-1) + 2(10) - 2(1)}{5} = \frac{-3 + 20 - 2}{5} = 3$$

$$\beta = \frac{1 + (-1) - 10}{5} = \frac{1 - 1 - 10}{5} = -2$$

$$\gamma = \frac{10 - 2(-1) + 1}{5} = \frac{10 + 2 + 1}{5} = 4$$

Les coordonnées du vecteur $t$ dans la base $(u, v, w)$ sont donc :

$$\boxed{(3, -2, 4)}$$

**Exercice 4 (ECRICOME ECT 2023)** *Assez facile, vous pouvez viser les autres exercices si vous vous sentez à l'aise*

**Partie 1**

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par : $\begin{cases} u_1 \in [0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{5}{12} u_n + \dfrac{1}{3} \end{cases}$

1. Compléter la fonction en langage Python suivante, qui prend en entrée un entier naturel non nul **n** et un réel **u1** de $[0, 1]$ correspondant au terme initial $u_1$ de la suite, et renvoie le terme $u_n$.

```
import numpy as np

def suite(n,u1) :
    u=u1
    for k in range(..) :
      u=.....................
    return u
```

2. Donner l'expression du terme général de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en fonction de $n$ et de $u_1$.

**Partie 2**

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. On note $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $AX_1$ et $AX_2$.
4. Montrer que $P$ est inversible et donner son inverse. (*On vérifiera que* $P^{-1} = Q$.)
5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   a) Calculer $P^{-1}X$
   b) En déduire l'expression de $A^nX$ pour tout entier naturel $n$.

**Partie 3**

Un client d'une agence de voyages cherche à prévoir ses vacances au soleil pour l'hiver (entre décembre et février) et à éviter la pluie. Sur la destination souhaitée, on suppose que soit il pleut, soit il fait beau.

On sait de plus que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

— S'il fait beau un certain jour $n$, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{3}{4}$.

— S'il pleut un certain jour $n$, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{1}{3}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

— $A_n$ l'événement : «Il fait beau le jour $n$ », et $a_n$ la probabilité $P(A_n)$.

— $B_n$ l'événement : «Il pleut le jour $n$ », et $b_n$ la probabilité $P(B_n)$.

On suppose que le jour 1 , à savoir le 1er décembre, il fait beau. Donc $a_1 = P(A_1) = 1$.

7. Déterminer $b_1, a_2, b_2$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que $P(A_{n+1}) = \frac{3}{4}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$ et que $P(B_{n+1}) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n)$.
   b) En déduire que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où $M = \frac{1}{12}A$.
   c) Justifier que $a_n + b_n = 1$.
9. a) Exprimer, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ en fonction de $M$ et $n$.
   b) En déduire l'expression de $a_n$ et de $b_n$ en fonction de $n$.
10. On se propose, dans cette question, de trouver le terme général de $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ d'une manière différente.
    a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}$

b) En utilisant la partie 1, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$

c) En déduire l'expression de $b_n$ en fonction de $n$.

11. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

12. Le client doit partir le 1er décembre, pour un séjour de 10 jours (du 1er décembre au 10 décembre).

a) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau durant les 9 premiers jours et qu'il pleuve le dernier jour ?

b) Quelle est la probabilité que le voyageur reparte sous la pluie, c'est-à-dire qu'il pleuve le jour 10 ?

## Partie 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : par : $\begin{cases} u_1 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{5}{12}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$

1.
```
import numpy as np

def suite(n,u1) :
    u=u1
    for k in range(1,n) :
      u=5/12*u+1/3
    return u
```

2. On résout d'abord l'équation $l = \frac{5}{12}l + \frac{1}{3}$.
$l = \frac{5}{12}l + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{12-5}{12}l = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{7}{12}l = \frac{1}{3} \Leftrightarrow l = \frac{1}{3}.\frac{12}{7} = \frac{4}{7}$.
On considère ensuite $v_n = u_n - l$.
$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{5}{12}u_n + \frac{1}{3} \\ \ell = \frac{5}{12}\ell + \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - \ell = \frac{5}{12}u_n - \frac{5}{12}\ell$ (par différence) $\Leftrightarrow u_{n+1} - \ell = \frac{5}{12}(u_n - \ell) \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{5}{12}v_n$ .
Ce qui prouve que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $\frac{5}{12}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

On a alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = v_n + \ell = v_1.\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7} = (u_1 - \frac{4}{7}).\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}.}$$

## Partie 2

3. $AX_1 = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix} = 12X_1$ et $AX_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5X_2$.

4. Det(P)=4+3=7$\neq 0$ donc $P$ est inversible et son inverse $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = Q$.

   *Variante : Calculer P.Q pour montrer que c'est égal à I puis conclure*

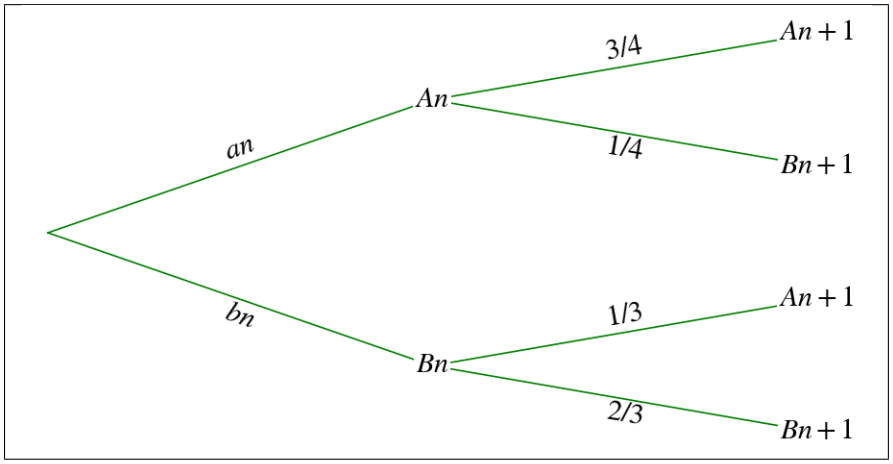
5. Pour n entier naturel, on pose $H_n$ : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
   Initialisation : $H_0$ est vraie car $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$ . Vérifions aussi le résultat au rang 1 : $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = A$.
   Hérédité : on suppose que $H_n$ est vraie (c'est à dire $A^n = PD^nP^{-1}$) pour une valeur de $n$ fixée et démontrons que $H_{n+1}$ est vraie (c'est à dire $A^{n+1} = PA^{n+1}P^{-1}$).
   $A^{n+1} = A^n.A = PD^nP^{-1}\,PDP^{-1} = PD^n\,DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
   Conclusion :$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ .

6. a) $P^{-1}X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

   b) $\forall n \in \mathbb{N}, A^nX = PD^nP^{-1}X = PD^n.\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
   $= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12^n \\ -3.5^n \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \times 12^n + 3 \times 5^n \\ 3 \times 12^n - 3 \times 5^n \end{pmatrix}$.

## Partie 3

Remarque : A la lecture de l'énoncé, on peut visualiser la situation à l'aide d'un arbre.




7. Comme le premier jour, il fait beau alors $b_1 = 0, a_2 = \frac{3}{4}$ *et* $b_2 = \frac{1}{4}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A_n, B_n)$, on a :
   $P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1})$
   $= P(A_n)\,P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)\,P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{4}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$.
   $P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) = P(A_n)\,P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)\,P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n)$.

   b) Pour $n$ entier naturel,
   $M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{12}a_n + \frac{4}{12}b_n \\ \frac{3}{12}a_n + \frac{8}{12}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

c) Pour n entier naturel, $a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{4}a_n+\frac{2}{3}b_n=a_n+b_n$. Or $a_1+b_1=1$, d'où $a_n+b_n=1$.

9. a) Pour n entier naturel non nul, on pose $H_n$ : « $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ».

Initialisation : $H_1$est vraie car $M^{1-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=I.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$.

Hérédité : on suppose que $H_n$ est vraie (c'est à dire $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) pour une valeur de $n$ fixée et démontrons que $H_{n+1}$ est vraie (c'est à dire $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) .

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}[d'après\,9.b]=M.M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}[d'après\,H_n]=M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Conclusion : Par récurrence sur $n$, que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}=M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{12^{n-1}}A^{n-1}X=\frac{1}{7.12^{n-1}}\begin{pmatrix} 4.12^{n-1}+3.5^{n-1} \\ 3.12^{n-1}-3.5^{n-1} \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} a_n=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \\ b_n=\frac{3}{7}-\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \end{cases}, \forall n\in\mathbb{N}^*.$

10. On se propose, dans cette question, de trouver le terme général de $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ d'une manière différente.

a) $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_{n+1}=P(A_{n+1})=\frac{3}{4}P(A_n)+\frac{1}{3}P(B_n)\,[d'après\,9.a]=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{3}b_n=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{3}(1-a_n)[d'après\,9.c]=\frac{5}{12}a_n+\frac{1}{3}$

b) Dans la partie 1, on a trouvé $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=(u_1-\frac{4}{7}).\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}+\frac{4}{7}$.

En prenant $u_n$=$a_n$ car $a_1$=1$\in[0;1]$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_{n+1}=\frac{5}{12}a_n+\frac{1}{3}$ alors $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_n=\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}+\frac{4}{7}$ vu que $a_1$-$\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

c) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n=1-a_n=1-\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}-\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ .

11. Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ si q$\in]-1;1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{4}{7}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{3}{7}$.

12. Le client doit partir le 1er décembre, pour un séjour de 10 jours (du 1er décembre au 10 décembre).

a) $P(A_1\cap A_2\cap.....\cap A_9\cap B_{10})$=$P(A_1).P_{A_1}(A_2).....P_{A_8}(A_9).\cap P_{A_9}(B_{10})$ [ Formule des probabilités composées sachant que que le temps d'un jour donné dépend seulement du jour d'avant et que $P(A_1)$=1] =$\frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^8$ .

b) $P(B_{10})=b_{10}=\frac{3}{7}-\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^9$ .

**Exercice 5 (Edhec ECS 2021)**

1. Question préliminaire :
   On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite $\ell$ et on pose, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

   a) Établir, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell'$ qui vérifie $\ell' \leq \ell$.

   c) Établir, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'inégalité suivante :

$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$

   d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

   On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

   Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$.

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est bien définie et supérieur ou égal a 1 .

   b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et donner sa limite.

   c) Écrire un scipt Python qui permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de $n$ pour laquelle on a $S_n > 1000$.

3. Recherche d'un équivalent de $u_n$.

   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \dfrac{1}{2}$.

   b) Étudier les variations de la fonction $f$ définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   c) Utiliser la première question pour établir que : $\dfrac{u_n}{\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

4. a) Exprimer $S_n$ en fonction de $u_n$.
   *Indication pas dans le sujet initial : on pourra calculer les premiers termes et démontrer une conjecture par récurrence.*

   b) Des propositions suivantes, laquelle (lesquelles) est (sont) vraies ? Justifier votre réponse.

   i. $\dfrac{4S_n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ ii. $\dfrac{nS_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ iii. $\dfrac{\frac{n}{2}}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ iv. $\dfrac{2S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$

   c) Compléter le script `Python` suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question 2.c) sans calculer $S_n$ :

```
n=0
u=1   # u0=1

while u <= .........
    u = .............
    n=n+1
print ( .......... )
```

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$ on a par croissance de la suite :

$$a_k \leqslant a_n$$

En sommant ces inégalités pour $k$ allant de 0 à $n-1$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} a_n \qquad \text{autrement dit} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant n a_n$$

En divisant par $n$ qui est strictement positif on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant a_n$$

On a bien établi :

$$\boxed{b_n \leqslant a_n}$$

On étudie maintenant la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On s'intéresse au signe de $b_{n+1} - b_n$. On remarque que :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{n+1} \times \left( a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) \\ &= \frac{1}{n+1} a_n + \frac{n}{n+1} \times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{=b_n} = \frac{1}{n+1} a_n + \frac{n}{n+1} b_n \end{aligned}$$

On a donc :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} a_n + \frac{n}{n+1} b_n - b_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geqslant 0} \times \underbrace{(a_n - b_n)}_{\geqslant 0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{b_{n+1} - b_n \geqslant 0}$$

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

b) Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge vers le réel $\ell$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $a_n \leqslant \ell$. Or, on vient de montrer que $b_n \leqslant a_n$. On a donc :

$$b_n \leqslant \ell$$

Ceci prouve que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{majorée}}$ De plus, elle est $\boxed{\text{croissante}}$ (question 1.a). On en déduit qu'elle converge vers un réel que l'on note $\ell'$. Enfin, en passant à la limite dans l'inégalité

$$b_n \leqslant \ell$$

on obtient bien :

$$\boxed{\ell' \leqslant \ell}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$b_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} a_k = \frac{1}{2n} \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1} a_k$$

Or, d'une part :

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{b_n} = \frac{b_n}{2}$$

D'autre part, pour tout $k \in [\![n; 2n-1]\!]$ on a (par croissance de la suite) :

$$a_k \geqslant a_n$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant \underbrace{\sum_{k=n}^{2n-1} a_n}_{na_n} \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant \frac{a_n}{2}$$

On a bien établi l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{b_{2n} \geqslant \frac{b_n}{2} + \frac{a_n}{2}}$$

d) En passant à la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\ell' \geqslant \frac{\ell'}{2} + \frac{\ell}{2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\ell' \geqslant \ell}$$

De plus on a établi en question 1.b l'inégalité $\ell' \leqslant \ell$. On en déduit que : $\ell' = \ell$. Autrement dit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n}$$

2. a) On raisonne par récurrence sur $n$.

**Initialisation.** Pour $n = 0$, le terme $u_0$ est bien défini et vaut 1. On a donc bien : $u_0 \geqslant 1$.

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n$ est bien défini et que : $u_n \geqslant 1$. Montrons que :

$$u_{n+1} \text{ est bien défini et que : } u_{n+1} \geqslant 1$$

On a : $u_n^2 \geqslant 0$ et $u_n \geqslant 1$ donc : $u_n^2 + u_n \geqslant 1$. Le terme $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ est donc $\boxed{\text{bien défini}}$ (la quantité sous la racine est positive) et par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$ :

$$u_{n+1} \geqslant \sqrt{1} \quad \text{autrement dit} \quad \boxed{u_{n+1} \geqslant 1}$$

Ceci achève la récurrence.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geqslant 0$ donc :

$$u_n^2 + u_n \geqslant u_n^2$$

Par croissance de la fonction racine on en déduit :

$$\underbrace{\sqrt{u_n^2 + u_n}}_{u_{n+1}} \geqslant \sqrt{u_n^2}$$

Enfin, $u_n \geqslant 0$ donc $\sqrt{u_n^2} = u_n$. On a donc établi l'inégalité :

$$\boxed{u_{n+1} \geqslant u_n}$$

Ceci prouve que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$ On a donc deux possibilités :

1) soit cette suite converge
2) soit elle diverge vers $+\infty$.

On va écarter le cas 1) en raisonnant par l'absurde. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers un réel que l'on note $c$. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \qquad \text{donc} \qquad u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$$

En passant à la limite dans cette égalité (la fonction carré est continue) on obtient :

$$c^2 = c^2 + c \qquad \text{donc} \qquad c = 0$$

D'autre part, $u_0 = 1$ et la suite est croissante. On a donc nécessairement : $c \geqslant 1$.

On obtient la contradiction suivante : $0 \geqslant 1$.

Ceci prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, et donc qu'elle $\boxed{\text{diverge vers } +\infty}$

c)

```
n=1
u=1
S=1
while S<=1000
    u=sqrt(u**2+u)
    S=S+u
    n=n+1
print(n)
```

**Remarque** Comme $S_n \geqslant u_{n-1}$, $S_n$ tend vers $+\infty$. Ceci garantit que la boucle while s'arrêtera.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n \\ &= \frac{\left(\sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n\right) \times \left(\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n\right)}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{\sqrt{u_n^2 + u_n}^2 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \end{aligned}$$

En divisant numérateur et dénominateur par $u_n$ (licite car $u_n > 0$) on obtient :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1}$$

Enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$ donc par continuité de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$ en $x = 0$ :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1} \qquad \text{existe et vaut} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

On a bien montré que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}}$$

**Remarque** On pouvait aussi partir de l'écriture $u_{n+1} - u_n = u_n \times \left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{u_n}} - 1\right)$ et appliquer l'équivalent usuel $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$ à $x = \dfrac{1}{u_n}$.

b) La fonction $f$ est dérivable sur $[1; +\infty[$ et pour tout $x \in [1; +\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 = \frac{2x + 1 - 2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{\left(2x + 1 - 2\sqrt{x^2+x}\right) \times \left(2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x}\right)}{2\sqrt{x^2+x}\left(2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x}\right)} \end{aligned}$$

Le dénominateur est positif et le numérateur vaut :

$$(2x+1)^2 - \left(2\sqrt{x^2+x}\right)^2 = 4x^2 + 4x + 1 - 4(x^2+x) = 1 > 0$$

On a donc, pour tout $x \in [1; +\infty[$ : $\boxed{f'(x) > 0}$ Ceci prouve que

la fonction $f$ est $\boxed{\text{strictement croissante}}$ sur $[1; +\infty[$

On va maintenant montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant u_{n+2} - u_{n+1}$$

On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = f(u_n)$$

et de même :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1})$$

Or, on sait que : $u_n \leqslant u_{n+1}$ (question 2.b). Par croissance de la fonction $f$ on en déduit :

$$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \qquad \text{donc} \qquad u_{n+1} - u_n \leqslant u_{n+2} - u_{n+1}$$

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

c) On applique le raisonnement de la question 1 avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci est licite car la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante (3.b) et convergente (3.a). On sait d'après 1.d que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n} \times (u_n - u_0) = \frac{u_n}{n} - \frac{1}{n}$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} - \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) \overset{3.a}{=} \frac{1}{2}$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} - \underbrace{\frac{2}{n}}_{\text{tend vers } 0} = 1 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} = 1$$

Ceci prouve bien que : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}}$

4. a) On commence par calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ | $\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ |
| $S_n$ | | 1 | $1+\sqrt{2}$ | $1+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}$ |

Sur les premiers termes la formule $\boxed{S_n = u_n^2 - 1}$ est vérifiée. Essayons d'établir cette formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

**Initialisation.** Pour $n = 1$ on a bien :

$$\underbrace{S_1}_{1} = \underbrace{u_1^2 - 1}_{2-1}$$

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que : $S_n = u_n^2 - 1$. Montrons que : $S_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1$. On a :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = S_n + u_n$$

Par hypothèse de récurrence : $S_n = u_n^2 - 1$. Donc :

$$S_{n+1} = u_n^2 - 1 + u_n$$

D'autre part :

$$u_{n+1}^2 - 1 = \sqrt{u_n^2 + u_n}^2 - 1 = u_n^2 + u_n - 1$$

On a donc bien : $\boxed{S_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1}$

Ceci achève la récurrence. On cherche maintenant un équivalent de $S_n$ en $+\infty$. On a :

$$\frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} = \frac{u_n^2}{\frac{n^2}{4}} - \frac{1}{\frac{n^2}{4}} = \underbrace{\left(\frac{u_n}{\frac{n}{2}}\right)^2}_{\text{tend vers } 1} - \underbrace{\frac{4}{n^2}}_{\text{tend vers } 0} \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} = 1$$

Bilan : $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4}}$

b)

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a donc les équivalences suivantes :

$$S_n \leqslant 1000 \iff u_n^2 - 1 \leqslant 1000 \iff u_n^2 \leqslant 1001 \iff u_n \leqslant \sqrt{1001}$$

(on a utilisé la stricte croissance de la fonction racine carrée). D'où le programme suivant :

```
n=0
u=1
while u<=sqrt(1001)
    u=sqrt(u**2+u)
    n=n+1
print(n)
```

**Exercice 6 (Un grand classique vu en DM)**
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f$ converge en $+\infty$, $g$ périodique et $f + g$ croissante. Montrer que $g$ est constante.

Voir le TD.

**Exercice 7 (Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$)**
On considère la fonction $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{(x+1)\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer le signe de $f$ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $f$ est continue en 1. $f$ se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?
3. Calculer la dérivée $f'$ de $f$ sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
4. Soit $g$ la fonction $g(x) = x - \dfrac{1}{x} - 2\ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$.
   a) Déterminer les limites de $g$ en 0 et $+\infty$.
   b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction $g$ sur $]0, +\infty[$.
   c) Préciser le signe de $g$ sur $]0, +\infty[$.
5. En déduire le tableau de variations complet de $f$.
6. Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
7. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $\ln(x) < x - 1$. En déduire que, pour tout $x > 1$, on a $f(x) < x$.
8. Donner la représentation graphique de la fonction $f$ avec sur le même graphique la droite d'équation $y = x$.
9. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = a > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
   b) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

**Exercice 8 (Suite implicite)**
On désigne par $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction $f_n$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0, 1]$, donner une expression simplifiée de $f_n(x)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x$, possède une unique solution $\alpha_n$ dans $[0, 1]$.
3. a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
4. a) Déterminer $\alpha_2$ puis vérifier que $0 \leqslant \alpha_2 < 1$.
   b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
   c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$.

**Exercice 9 (Et une autre ! - la fin est un peu plus difficile)**

1. On définit pour tout entier $n \geq 3$ la fonction $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - n\ln x \end{array} \right.$
   a) Étudier les variations et les limites de $f_n$ et dresser son tableau de variations.
   b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}^{*+}$. On note $a_n$ la plus petite des solutions et $u_n$ l'autre.
   c) Justifier que : $1 \leq a_n \leq n \leq u_n$.
2. Étude de la suite $\left(a_n\right)_{n\geq 3}$
   a) Montrer que $\left(a_n\right)_{n\geq 3}$ est décroissante : on comparera $f_{n+1}(a_n)$ avec $f_{n+1}(a_{n+1})$
   b) En déduire que $\left(a_n\right)_{n\geq 3}$ est convergente et que sa limite est 1.
   c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(a_n)}{a_n - 1} = 1$.
   d) En déduire la limite de $n(a_n - 1)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
3. Étude de la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 3}$
   a) Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 3}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
   b) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, $\quad n\ln n \leq u_n \leq 2n\ln n$.
   c) En déduire la limite de $\dfrac{u_n}{n\ln n}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

---

1. a) $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme somme de fonctions qui le sont, avec $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x} = \dfrac{x-n}{x}$.
   Ainsi $f_n'(x)$ est du signe de $x - n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est à dire $f_n'(x) < 0$ pour $0 < x < n$ et $f_n'(x) > 0$ pour $x > n$.
   D'où le tableau : $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

| $x$ | $0$ | | $n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $n(1-\ln(n))$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

   b) On applique le théorème de la bijection monotone une fois sur $]0,\, n]$ et une fois sur $[n,\, +\infty[$, comme dans l'exercice précédent.
   Il faut bien sûr justifier que 0 est dans chaque intervalle image : $f_n(n) = n(1 - \ln n) < 0$
   c) La question précédente donne $0 < a_n \leq n \leq u_n$.
   Il suffit de constater que $f_n(1) = 1 > 0$, pour affiner et obtenir $1 \leq a_n$.
2. a) Pour tout $n \geq 3$, on a : $\quad f_{n+1}(a_n) = a_n - (n+1)\ln(a_n) = f_n(a_n) - \ln(a_n)$.
   Or, par définition, $f_n(a_n) = 0$, donc $\quad f_{n+1}(a_n) = -\ln(a_n) \leq 0$ car $a_n \geq 1$

   On a donc $\quad f_{n+1}(a_n) \leq 0$ et $\quad f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ (par définition de $a_{n+1}$).

   D'autre part, $f_{n+1}$ décroît sur $[1,\, n+1]$, intervalle contenant $a_n$ et $a_{n+1}$, donc les antécédents sont rangés en ordre inverse des images :
   pour tout $n \geq 3$, $\quad f_{n+1}(a_{n+1}) \geq f_{n+1}(a_n)$, donc $\quad a_{n+1} \leq a_n$.
   La suite $\left(a_n\right)_{n\geq 3}$ est donc décroissante.
   b) $\left(a_n\right)_{n\geq 3}$ étant décroissante et minorée par 1, elle converge.

Notons $\ell$ sa limite. Comme $a_n \geq 1$, pour tout $n \geq 3$, on en déduit, par passage à la limite que $\ell \geq 1$.

Déterminons $\ell$ :

Pour tout $n \geq 3$, on a $a_n - n\ln(a_n) = 0$, donc $\dfrac{a_n}{n} = \ln(a_n)$.

Or $\left(a_n\right)_{n\geq 3}$ converge vers une limite finie , donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(a_n) = 0$.

$\boxed{\text{On en déduit que } \left(a_n\right)_{n\geq 3} \text{ converge vers } e^0 = 1}$

c) On sait que $\lim\limits_{X\to 1} \dfrac{\ln X}{X-1} = 1$. (limite usuelle par taux d'accroissement)

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ donc, par composition : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(a_n)}{a_n - 1} = 1.}$

d) Par définition de $a_n$, on a : $a_n = n\ln(a_n)$ donc $\dfrac{a_n - 1}{\ln(a_n)} = n\,\dfrac{a_n - 1}{a_n}$ donc

$n(a_n - 1) = a_n\,\dfrac{a_n - 1}{\ln(a_n)}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(a_n)}{a_n - 1} = 1$.

Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n(a_n - 1) = 1}$

3. a) On a vu à la question **1) c .** que, pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq n$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

b) Par définition de $u_n$, on a : $u_n - n\ln(u_n) = 0$, donc $u_n = n\ln(u_n)$.
Or, pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq n$, donc $\ln(u_n) \geq \ln n$ car la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $n \geq 0$, donc $n\ln(u_n) \geq n\ln n$.

On en conclut que $\boxed{u_n \geq n\ln n}$

*deuxième inégalité :*

$$\begin{aligned} & 2n\ln(n) \geq u_n = n\ln(n) \\ \iff & 2\ln(n) \geq \ln(u_) \\ & n^2 \geq u_n. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} f_n(n^2) &= n^2 - n\ln(n^2) \\ &= n(n - 2\ln(n) \end{aligned}$$

est du signe de $n - 2\ln(n)$. Une étude rapide de $f : x \mapsto x - 2\ln(x)$ confirme que pour $n \geq 3$ on a bien $f_n(n^2) \geq 0 = f_n(u_n)$ et par croissance de $f_n$ on a $u_n \leq 2n\ln(n)$.

En résumé, $\boxed{\forall n \geq 3, \quad n\ln n \leq u_n \leq 2n\ln n}$

c) Question très très difficile, car la simple division par $n\ln(n)$ n'amenait rien...
Par croissance de ln on déduit de l'encadrement précédent que :

$$\ln(n\ln n) \leq \ln(u_n) \leq \ln(2n\ln n)$$

puis que

$$\ln n + \ln(\ln n) \leq \ln(u_n) \leq \ln 2 + \ln n + \ln(\ln n)$$

et enfin en divisant par $\ln(n)$ qui est positif :

$$1 + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \leq \frac{\ln(u_n)}{\ln n} \leq 1 + \frac{\ln 2}{\ln n} + \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}$$

On obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{\ln n} = 1$. Or $u_n = n\ln(u_n)$, donc $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n}$.

En reportant dans la limite précédente : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n\ln n} = 1.}$

****Bonnes fêtes à toutes et tous !****