La calculatrice est interdite. Durée de l'épreuve : 4h.

1. Lire le sujet en entier et en détail avant de commencer.
2. Une importance particulière sera attribuée à la rigueur de la rédaction et des justifications, qui devront être concises mais précises.
3. Une présentation agréable sera appréciée : laissez une marge à gauche, la première page libre, et encadrez vos résultats. **L'absence de respect de cette consigne entraîne une minoration de la note.**
4. Le sujet comporte 4 pages et 4 exercices. Bon courage !

Exercice 1 : Questions de cours

— Donner la loi, l'espérance et la variance pour chacune des lois classiques suivantes : Bernoulli, binomiale, uniforme. Donner la preuve de l'espérance pour la loi binomiale. Donner la preuve de la variance pour la loi uniforme.

— Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.

— Donner la définition d'une racine d'un polynôme. Rappeler la propriété équivalente à être une racine d'un polynôme. Combien de racines admet (au plus) un polynôme non nul ?

Exercice 2 : Des exercices proches du cours ou du DS précédent

1. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes ci-dessous :

$$S_1 : \begin{cases} x - z &= m \\ -2x + 3y + 4z &= 1 \\ y + z &= 2m \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

2. a) Inverser la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et A^3. En déduire, pour tout $n \geq 3$, A^n.

Calculer, pour tout $n \geq 3$, B^n.

3. a) Trouver les polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2P(x^2 + 1) = (x^3 + 2x^2 + 2x + 4)P'(x)$$

b) Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}_3[x]$ tels que :

$$P(0) = 0;\ P(1) = 0;\ P(-1) = 1;\ P'(1) = 0.$$

On pourra donner la réponse sous forme factorisée.

c) Donner la factorisation des polynômes suivants :

i. $P = x^4 + x^3 - 2x^2 - 8x$, ii. $Q = x^4 - x^2 - 6$, iii. $R = x^5 + 2x^3 + 9x$.

d) Trouver les réels a et b tel que $(X + 2)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$, et factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme obtenu.

4. a) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\}$.
   Montrez que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et préciser une base et la dimension de E.
   b) Soient $u = (1, 2, 1)$, $v = (2, 0, 3)$ et $w = (0, 1, 1)$.
      i. Montrez que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
      ii. Donnez les coordonnées du vecteur $t = (-1, 10, 1)$ dans cette base.

Exercice 3 : Commutant d'une matrice

Je vous ai remis l'exercice entier ici. Une partie des notions seront plus claires après le prochain chapitre

Partie 1 : questions préliminaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On pose :

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$$

appelé *le commutant de la matrice* A, et

$$\mathbb{R}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[x]\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et que $\mathbb{R}[A] \subset \mathscr{C}(A)$.
3. Déterminer $\mathscr{C}(I_n)$ et $\mathbb{R}[I_n]$.

Partie 2 : cas d'une matrice diagonale à coefficients diagonaux 2 à 2 distincts

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels strictement positifs et deux à deux distincts. Considérons :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

4. **Étude de $\mathscr{C}(D)$.**
   a) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $M \times D$ et $D \times M$.
   b) En déduire que M appartient à $\mathscr{C}(D)$ si, et seulement si, M est une matrice diagonale.
5. **Étude de $\mathbb{R}[D]$.**
   a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$:

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

   b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur P pour qu'il soit un polynôme annulateur de D.
   c) Montrer que si P est un polynôme annulateur non nul de D, alors $\deg(P) \geq n$.
   d) Montrer que $(I_n, D, \ldots, D^{n-1})$ est une famille libre de $\mathbb{R}[D]$.
   On admet pour la suite que cela prouve $\mathbb{R}[D] = \mathscr{C}(D)$.
6. **Étude de $\mathscr{R} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M^2 = D\}$.**
   a) Soit $M \in \mathscr{R}$. Montrer que M appartient à $\mathscr{C}(D)$. En déduire qu'il existe $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

   b) Montrer que $\mathscr{R}$ est de cardinal 2^n, et déterminer les 2^n matrices M vérifiant $M^2 = D$.

Partie 3 : cas des matrices de taille 2×2

7. Déterminer $\max_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.
8. On cherche à déterminer $\min_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.
   a) Montrer que $\min_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \leq 2$.
   b) Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 1$.
      i. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.
      ii. Aboutir à une contradiction et conclure.

Exercice 4 : Probabilités

Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$. On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu.
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2. Ce duel se déroule de manière analogue et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2. Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 et ainsi de suite.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k, qu'il peut remporter avec une probabilité p, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.
- Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.

Pour tout entier naturel n et pour tout $0 \leq k \leq n$, on considère les évènements :
— E_n : "le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n"
— B_k^n : "le joueur A_k a remporté le duel numéro n"

Partie I : Étude d'un cas particulier.

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

1. Donner la liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels.
2. Déterminer les probabilités $P(E_1)$ et $P(E_2)$.
3. Exprimer l'évènement $\overline{E_3}$ à l'aide des évènements B_k^n. En déduire que $P(\overline{E_3}) = \dfrac{1}{4}$.
   Vérifier alors que :
   $$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1)$$
4. Soit $n \geq 3$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, notons $A_k^{(n)}$ l'évènement «le vainqueur du n-ième duel a gagné k duels à l'issue du n-ième duel».
   a) Montrer que :
   $$P\left(E_n\right) = P\left(A_1^{(n)}\right) P_{A_1^{(n)}}\left(E_n\right) + P\left(A_2^{(n)}\right) P_{A_2^{(n)}}\left(E_n\right)$$
   b) En déduire :
   $$(\mathcal{R}_1) : P\left(E_n\right) = \frac{1}{2}P\left(E_{n-1}\right) + \frac{1}{4}P\left(E_{n-2}\right)$$
5. Justifier l'existence de quatre réels λ, μ, r_1, r_2 tels que :
   $$\forall n \geq 2, \quad P\left(E_n\right) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
   Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé. Calculer $\lim_{n \to +\infty} P\left(E_n\right)$.
6. *Non traitable pour l'instant (définition précise pas encore vue en cours)* Que vaut la probabilité $P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} E_k\right)$? Quelle est la probabilité de l'événement «le tournoi désignera un vainqueur» ?

Partie II : Étude du cas général

On revient au cas général : p désigne un réel quelconque de $]0;1[$ et N est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}X^k\right) - 1$$

7. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on note toujours $A_k^{(n)}$ l'événement : "à l'issue du n-ième duel, le vainqueur du n-ième duel a obtenu exactement k victoires".
   Montrer que : $\quad P\left(A_k^{(n)}\right) = pq^{k-1}$.

8. Pour tout $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, justifier l'égalité :

$$\forall n \geq N, \quad P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k})$$

9. Établir que pour tout $n \geq N$, on a :

$$(\mathcal{R}_2) : P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k})$$

10. Calculer $P(E_1), \ldots, P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}$$

11. Soit $n \geq N$. À l'aide de $(\mathcal{R}_2)$, démontrer la relation :

$$(\mathcal{R}_3) : P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1}P(E_{n-N+1})$$

12. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
    On note désormais r_N cette solution. Justifier que :

$$r_N > 1 \quad \text{et} \quad Q'(r_N) > 0$$

13. À l'aide de la relation $(\mathcal{R}_2)$, établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$$

La fin du sujet n'est pas faisable pour l'instant, mais le sera d'ici un mois. Je vous la mets tout de même, pour que vous puissiez vous y frotter quand nous aurons fait le cours sur les séries et sur les variables discrètes infinies.

14. Établir la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} P(E_n)$ puis, en sommant la relation $(\mathcal{R}_3)$ sur tous les entiers $n \geq N$, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$.

15. On définit X la variable aléatoire égale au nombre de duels qui ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. On conviendra que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.

    a) Soit $n \geq 2$. Justifier que les événements $\left(E_{n-1} \cap \overline{E_n}\right)$ et $[X = n]$ sont égaux, puis que :

$$P(X = n) = P(E_{n-1}) - P(E_n)$$

    b) Démontrer que X admet une espérance et exprimer $E(X)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$. En déduire la valeur de $E(X)$.

****Bon courage à toutes et tous !****